impa

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

elementos de matemática

ELEMENTOS DE TOPOLOGIA GERAL

ELON LAGES LIMA

AO LIVRO TÉCNICO S

CONSELHO NACIONAL DE PESQUISAS
Presidente: Dr. Antonio Moreira Couceiro

...

impa

INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PURA E APLICADA

COLEÇÃO / ELEMENTOS DE MATEMÁTICA

- ELEMENTOS DE ÁLGEBRA, POR LUIZ HENRIQUE JACY MONTEIRO
- ELEMENTOS DE TOPOLOGIA GERAL, POR ELON LAGES LIMA
- ELEMENTOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL, POR MANFREDO PERDIGÃO DO CARMO, EM PREPARO
- OUTROS TÍTULOS EM PREPARAÇÃO

Obra publicada
com a colaboração da

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Reitor: Prof. Dr. **Miguel Reale**

Editôra da Universidade de São Paulo

ELEMENTOS DE TOPOLOGIA GERAL

Elon Lages Lima

AO LIVRO TÉCNICO S.A.
E EDITÔRA DA UNIVERSIDADE DE S. PAULO
Rio de Janeiro / 1970

APRESENTAÇÃO

Nos dias atuais, ninguém desconhece a importância das ciências básicas, sem as quais não se pode obter uma tecnologia independente nem resolver os problemas fundamentais com vistas ao bem-estar humano. Muito menos se ignora que o cultivo dessas ciências e o estímulo às vocações jovens se faz através da difusão adequada das idéias avançadas.

A criação de uma literatura científica brasileira é, portanto, uma tarefa de primeira importância.

O Instituto de Matemática Pura e Aplicada do Conselho Nacional de Pesquisas com a presente coleção procura cumprir com entusiasmo a parte que lhe compete nessa tarefa.

Estas publicações são possíveis graças ao apoio recebido do Conselho Nacional de Pesquisas, da Divisão do Ensino Superior do M.E.C., aos esforços do meu antecessor na direção do I.M.P.A., Dr. Lindolpho de Carvalho Dias, e ao espírito empreendedor dos diretores de "AO LIVRO TECNICO S. A.", a quem são devidos agradecimentos especiais.

ELON LAGES LIMA

Diretor do I.M.P.A.

PREFÁCIO

Êste livro constitui meu depoimento pessoal sôbre que Topologia Geral gostaria fôsse sabida por todos os matemáticos.

Êle foi escrito para principiantes. Assim é que:

1) As demonstrações dos teoremas e as discussões dos exemplos são feitas com todos os detalhes. As ardilosas frases do tipo "é fácil ver" são raras e tomei cuidado para que fôssem sinceras.

2) Os conceitos básicos e os resultados fundamentais são motivados e ilustrados com exemplos e contra-exemplos abundantes.

3) A generalidade e a abstração são mantidas dentro de limites razoáveis. (Filtros e estruturas uniformes são relegados a exercícios; axiomas de separação são discutidos apenas quando precisam ser usados; espaços métricos são freqüentemente considerados e examinados em particular.)

Espero que o livro se preste para estudo individual. Com efeito, êle se destina ao leitor independente. Por outro lado, se adotado como texto de um curso, o professor poderá tirar proveito do seu tratamento detalhado e ganhar tempo, deixando a carga do aluno a leitura de certas demonstrações e de alguns exemplos.

O leitor notará grande número de exercícios. Nenhum dos resultados nêles enunciados é admitido no texto. Não espero que o leitor os resolva a todos, mas considero importante que todos sejam lidos e muitos resolvidos. O nível dos exercícios é bem variado, havendo alguns triviais e outros difíceis. Creio, porém, que nenhum dêles é inacessível a partir do que foi ensinado no texto. Não só o nível, como também a finalidade e o teor dos exercícios variam bastante. Alguns são contra-exemplos, visando estabelecer os limites do alcance de certas proposições e definições. Muitos são testes para verificar se os conceitos foram bem assimilados. Vários são proposições interessantes, que bem poderiam ser incluídas no texto, não fôsse o receio de torná-lo infinito. Outros indicam aplicações da teoria. Outros ainda são escritos no estilo de artigos concisos, dêsses que se encontram em algumas revistas matemáticas. Êles desenvolvem

um tópico, dando as definições e enunciando os resultados, porém omitindo as demonstrações. Em tais exercícios (em diversos outros) o leitor encontrará uma série de afirmações, quase sempre sem um pedido explícito ("demonstre...") ou uma pergunta. O exercício consiste, então, em demonstrar cada uma das afirmações feitas. No caso de um curso, o professor pode usar tais exercícios como material de "projetos", em cada um dos quais o aluno é solicitado a escrever um ensaio detalhado sôbre aquêle tópico, desenvolvendo o roteiro indicado pelo exercício.

Uma palavra sôbre os exemplos. Os axiomas de espaço topológico são notórios pela sua extrema liberalidade. Êles deixam margem ampla para a imaginação de exemplos artificiais e casos patológicos de espaços que nunca ocorrem nas aplicações da Topologia aos outros ramos da Matemática. Na redação do presente texto, fizemos um esfôrço para evitar essa tendência, que não consideramos educativa. Em conseqüência, os numerosos exemplos aqui discutidos referem-se quase sempre a situações que podem ser encontradas nas aplicações. Isto é feito em coerência com o fato de que a importância da Topologia Geral (e mesmo da Topologia, em geral) não reside no seu valor intrínseco, mas antes na sua enorme versatilidade como auxiliar de outras disciplinas matemáticas.

Há dois assuntos que estavam no projeto inicial do livro, mas que foram sacrificados em prol da limitação do volume. São êles o Teorema de Aproximação de Stone-Weierstrass e uma exposição da teoria dos Espaços Paracompactos. O leitor encontrará tratamentos adequados dêsses tópicos em [Bourbaki], [Dugundji], [Kelley] e outros livros de topologia. (As referências dêsse tipo dizem respeito aos livros citados na bibliografia que apresentamos no final da obra.)

Ao terminar, é com grande prazer que apresento agradecimentos aos meus amigos Lindolpho C. Dias, porque fui "comissionado" para escrever êste livro, J. Barros Neto, que leu e criticou a parte inicial, Jacob Palis, a quem devo vários aperfeiçoamentos nos seis primeiros capítulos, e Célio Alvarenga, que utilizou porções do livro como texto e fêz diversas correções. Estendo ainda meus agradecimentos a Alberto Azevedo e Jorge Sotomayor, que revisaram a edição mimeografada do livro em cursos da PUCRJ e no IMPA e corrigiram vários "otimismos" que cometi, principalmente nos exercícios.

Rio de Janeiro, abril de 1970

ELON LAGES LIMA

ÍNDICE

Preliminares

Capítulo 0

§1. Introdução

Os pré-requisitos formais para a leitura dêste livro são:

1) a linguagem, os conceitos básicos e as propriedades elementares relativos a conjuntos e funções;

2) a noção de número real, em particular os conceitos de supremo, ou extremo superior, e ínfimo, ou extremo inferior, de um conjunto limitado de números reais.

Neste capítulo preliminar, exporemos de modo sucinto, porém completo (sem demonstrações), os fatos supostos conhecidos no texto. Tornaremos assim mais precisas as duas condições acima. Êste capítulo poderá servir para recordação e referência quanto à notação e a terminologia empregadas nos seguintes (as quais, de resto, são *standard*). No último parágrafo daremos uma lista de livros que contêm, em forma detalhada, tôda a matéria aqui tratada.

Logo no Cap. I, o leitor notará, em alguns exemplos, o uso de integrais de funções de uma variável real. (A derivada também aparece, aqui e acolá.) Observará ainda vários exemplos de espaços vetoriais e normas nesses espaços. Tais conceitos não foram, entretanto, mencionados entre os pré-requisitos acima. A razão é que o leitor dêste livro, muito provàvelmente, já terá tido um curso de Cálculo, onde terá visto integrais e derivadas. Em segundo lugar, tais exemplos foram incluídos porque são importantes mas a omissão dos mesmos não prejudicará a seqüência lógica da exposição. Quanto aos espaços vetoriais, acreditamos que a Álgebra Linear deve ser parte obrigatória do treinamento matemático básico e

sua presença aqui decorre, em parte, desta crença. Por outro lado, deve-se esclarecer que a noção de espaço vetorial está definida neste capítulo e pouco mais será utilizado no texto. Além disso, a omissão de tôdas as referências a espaços vetoriais no texto não prejudicará essencialmente a compreensão das idéias topológicas aqui expostas.

§ 2. Conjuntos

Usaremos como sinônimos os têrmos *conjunto* e *coleção.* Um conjunto consiste de objetos, de natureza qualquer, chamados os *elementos* do conjunto. Os elementos da maioria dos conjuntos estudados neste livro chamar-se-ão *pontos.*

A notação $x \in A$ (lê-se "x pertence a A") significa que x é um elemento do conjunto A. Anàlogamente, escreve-se $x \notin A$ para significar que x não pertence a A, isto é, que o objeto x não é um dos elementos do conjunto A.

Em geral, usam-se letras minúsculas $a, b, c, x, y, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ para indicar objetos, e letras maiúsculas $A, B, C, X, Y, \Delta, \Gamma, \ldots$ para indicar conjuntos. Se os elementos de um conjunto forem representados por letras maiúsculas $A, B, \ldots, Z$, o conjunto será indicado com uma letra gótica $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{Z}$.

Dados os objetos $a, b, c, \ldots$, indica-se com $\{a, b, c, \ldots\}$ o conjunto que é formado dêsses elementos. Assim, por exemplo, $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ é o conjunto dos inteiros positivos; $\{1, 2\}$ é o conjunto cujos elementos são os inteiros 1 e 2. Podemos também considerar o conjunto cujo único elemento é o objeto a. Êsse conjunto é indicado com $\{a\}$. Estritamente falando, deve-se distinguir o conjunto $\{a\}$ do seu único objeto a, do mesmo modo como se distingue uma biblioteca contendo um único livro, do próprio livro. Muitas vêzes, porém, escreveremos a em vez de $\{a\}$, por simplicidade, quando não houver perigo de confusão.

Geralmente os conjuntos considerados em Matemática não são definidos especificando-se um por um seus elementos. O método usual de se obter um conjunto é o seguinte. Parte-se de um conjunto básico X e considera-se uma condição, ou uma propriedade P, que se refira a um elemento genérico do conjunto X. A propriedade P define um conjunto S, que se chama uma *parte* ou um *subconjunto* de X. S consiste dos elementos $x \in X$ que gozam da propriedade P. Em símbolos:

$$S = \{x \in X;\ x \text{ goza da propriedade } P\}.$$

Por exemplo, seja $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ o conjunto dos números inteiros positivos e consideremos a seguinte propriedade que se refere a um inteiro

genérico $x \in \mathfrak{N}$:

$$\text{“}x \text{ é maior do que 5”}.$$

A propriedade P de um número inteiro positivo ser maior do que 5 define uma *parte* ou um *subconjunto* S do conjunto N dos números inteiros positivos. S é formado pelos inteiros maiores do que 5. Em símbolos:

$$S = \{x \in N;\ x > 5\}.$$

Uma relação importante entre conjuntos é a relação de *inclusão*. Dados dois conjuntos A e B, escreveremos $A \subset B$ e diremos que A *está contido* em B, ou que A *está incluído* em B, quando todo elemento de A fôr também um elemento de B. Equivalentemente: dizer que $A \subset B$ é o mesmo que afirmar que A é um subconjunto de B. Por exemplo, seja A o conjunto dos quadrados do plano e B o conjunto dos retângulos. Tem-se $A \subset B$. Outro exemplo: seja x um objeto e A um conjunto. Dizer que $x \in A$ é equivalente a afirmar que $\{x\} \subset A$.

A relação de inclusão goza das seguintes propriedades:

Reflexividade: para todo conjunto A, tem-se $A \subset A$;

Anti-simetria: se $A \subset B$ e $B \subset A$, então $A = B$;

Transitividade: se $A \subset B$ e $B \subset C$, então $A \subset C$.

A propriedade anti-simétrica diz que dois conjuntos são iguais precisamente quando possuem os mesmos elementos. Sempre que tivermos de provar que dois conjuntos A e B são iguais, mostraremos primeiro que $A \subset B$ (isto é, que todo elemento de A pertence necessàriamente a B) e depois que $B \subset A$.

Observemos que, em Matemática, o sinal de igualdade $=$, numa expressão como $E = D$, significa que E e D são símbolos que representam o mesmo objeto. Em outras palavras, uma coisa só é *igual* a si mesma.

Chamamos a atenção para o fato de que a notação $A \subset B$ não exclui a possibilidade de ser $A = B$. Quando fôr necessário afirmar que $A \subset B$ e $A \neq B$, diremos que A é uma *parte própria* ou um *subconjunto próprio* de B. Às vêzes se escreve $A \underset{\neq}{\subset} B$ para indicar êste fato.

Um conjunto pode não possuir elementos. Indicaremos com $\varnothing$ o *conjunto vazio*, o qual não possui elementos. $\varnothing$ é caracterizado pelo fato de que a propriedade “$x \in \varnothing$” nunca é satisfeita, seja qual fôr x. O conjunto vazio pode ser definido através de qualquer propriedade contraditória. Por exemplo, dado um conjunto arbitrário A, tem-se

$$\varnothing = \{x \in A;\ x \neq x\}.$$

Qualquer que seja o conjunto X, tem-se $\varnothing \subset X$. Ou seja, o conjunto vazio está contido em qualquer outro conjunto. (Para negar que $\varnothing$ estivesse contido em X seria preciso exibir um elemento x tal que $x \in \varnothing$ mas $x \notin X$, o que é impossível pois $x \in \varnothing$ nunca é satisfeita. Logo, $\varnothing \subset X$.)

Dado um conjunto X, indicaremos com $\mathfrak{P}(X)$ o *conjunto das partes de* X. Os elementos de $\mathfrak{P}(X)$ são os subconjuntos de X. Portanto, "$A \in \mathfrak{P}(X)$" e "$A \subset X$" são afirmações equivalentes. Por exemplo, seja qual fôr X, temos $\varnothing \in \mathfrak{P}(X)$ e $X \in \mathfrak{P}(X)$.

Sejam P e Q propriedades que se referem a um elemento genérico de um conjunto X, as expressões "P implica Q", "se P então Q", "P acarreta Q", "P é condição suficiente para Q", "Q é condição necessária para P" têm tôdas o mesmo significado. Querem dizer que o conjunto dos elementos de X que gozam da propriedade P está contido no conjunto dos elementos de X que gozam da propriedade Q. Para exprimir êste fato, usa-se a notação $P \Rightarrow Q$.

Também as expressões: "P se, e sòmente se, Q", "P é equivalente a Q", "P é necessária e suficiente para Q", "P é o mesmo que Q" têm tôdas o mesmo significado. Querem dizer que P implica Q e Q implica P, isto é, o conjunto dos elementos de X que gozam da propriedade P é igual ao conjunto dos elementos de X que gozam da propriedade Q. A notação $P \Leftrightarrow Q$ é então usada.

Dados os conjuntos A e B, indica-se com $A \cup B$ a *reunião* de A e B, que é o conjunto formado pelos elementos de A mais os elementos de B. Assim, $x \in A \cup B$ se, e sòmente se, pelo menos uma das seguintes afirmações é correta: $x \in A$ ou $x \in B$. Em símbolos:

$$A \cup B = \{x; x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Note-se que "$x \in A$ ou $x \in B$" não exclui que x pertença simultâneamente a A e a B. O significado matemático de *ou* não é exclusivo, como na linguagem corrente.

A *interseção* de dois conjuntos A, B é o conjunto $A \cap B$, formado pelos elementos comuns a A e a B, isto é, pelos elementos que pertencem simultâneamente aos conjuntos A e B. Em símbolos:

$$A \cap B = \{x; x \in A \quad \text{e} \quad x \in B\}.$$

Por exemplo, sejam $A = \{x \in N;\ x < 10\}$ o conjunto dos inteiros positivos menores do que 10 e $B = \{x \in N;\ x \geq 5\}$ o conjunto dos inteiros positivos maiores do que ou iguais a 5. Temos $A \cup B = N$ e $A \cap B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

Quando $A \cap B = \varnothing$, diz-se que os conjuntos A e B são *disjuntos*. Por exemplo, o conjunto A dos triângulos retângulos do plano e o conjunto B dos triângulos-eqüiláteros são disjuntos, pois nenhum triângulo pode ser ao mesmo tempo retângulo e eqüilátero. Valem as seguintes propriedades da reunião e da interseção:

$$\begin{array}{ll}
A \cup \varnothing = A & A \cap \varnothing = \varnothing \\
A \cup A = A & A \cap A = A \\
A \cup B = B \cup A & A \cap B = B \cap A \\
(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) & (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\
A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A & A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B \\
A \subset B,\ A' \subset B' \Rightarrow A \cup A' \subset B \cup B' & A \subset B,\ A' \subset B' \Rightarrow A \cap A' \subset B \cap B' \\
A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) & A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).
\end{array}$$

Não há dificuldade alguma em definir a reunião $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ e a interseção $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ de vários conjuntos $A_1, \ldots, A_n$. Valem propriedades análogas para estas operações.

Dados os conjuntos A, B, a *diferença* $A - B$ é o conjunto dos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B. Ou seja:

$$A - B = \{x;\ x \in A,\quad x \notin B\}.$$

Não se exige que B esteja contido em A para formar a diferença $A - B$. No caso particular em que $B \subset A$, a diferença $A - B$ chama-se o *complementar* do conjunto B relativamente a A. Quando o conjunto A é fixado numa determinada discussão e contém todos os demais conjuntos que ocorrem na referida discussão, diz-se simplesmente que $A - B$ é o "complementar de B" e escreve-se, às vêzes, $\complement B = A - B$.

A operação de diferença goza das seguintes propriedades:

$$\begin{array}{l}
A - (B \cup B') = (A - B) \cap (A - B') \\
A - (B \cap B') = (A - B) \cup (A - B') \\
B \subset B' \Rightarrow A - B' \subset A - B.
\end{array}$$

No caso de complementares, as propriedades acima assumem uma forma mais elegante:

$$\begin{array}{l}
\complement(B \cup B') = \complement B \cap \complement B' \\
\complement(B \cap B') = \complement B \cup \complement B' \\
B \subset B' \Rightarrow \complement B' \subset \complement B.
\end{array}$$

Dados dois objetos quaisquer a e b, é importante estabelecer uma distinção entre o *conjunto* $\{a, b\}$ formado pelos elementos a e b, e um nôvo conceito que introduziremos agora, que é o *par ordenado* (a, b). O par ordenado consiste dos objetos a, b (que podem ser distintos ou não) e da

escolha de um dêles para ser o *primeiro* objeto do par (e o outro, conseqüentemente, será o segundo). A notação (a, b) significa que a é o primeiro e b o segundo objeto do par ordenado. Dados a e b, tem-se sempre $\{a, b\} = \{b, a\}$, isto é, o conjunto cujos elementos são a e b é igual ao conjunto cujos elementos são b e a, pois cada elemento de um dêsses conjuntos é também um elemento de outro. Por outro lado, temos $(a, b) \neq (b, a)$, exceto quando $a = b$. Notemos ainda que $\{a, a\} = \{a\}$, mas (a, a) é ainda um par ordenado.

Um par ordenado (a, b) é caracterizado pela seguinte condição de igualdade:

$$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a', \quad b = b'.$$

(Compare com a condição de igualdade $\{a, b\} = \{a', b'\}$ fornecida pela propriedade anti-simétrica da relação de inclusão.)

Dados os conjuntos A, B, o *produto cartesiano* $A \times B$ é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) cujo primeiro elemento a pertence a A e cujo segundo elemento b pertence a B. Ou seja:

$$A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}.$$

Dado $(a, b) \in A \times B$ é comum chamar a de *primeira coordenada* do par (a, b), enquanto b se chama a *segunda coordenada* do par.

O subconjunto do produto $A \times A$ formado pelos elementos (x, x) de coordenadas iguais chama-se a *diagonal* de $A \times A$ e representa-se pelo símbolo Δ. Assim,

$$\Delta = \{(x, y) \in A \times A; \quad x = y\}.$$

A definição de $A \times B$ é, evidentemente, motivada pela introdução de coordenadas cartesianas no plano. A figura é explicativa. As propriedades abaixo são imediatas:

$$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C), \quad (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

$$(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$$

$$A \subset A', \quad B \subset B' \Rightarrow A \times B \subset A' \times B'.$$

§ 3. Funções

Uma função $f : A \to B$ é um conceito matemático que consta de três ingredientes: um conjunto A, chamado o *domínio* da função (ou o conjunto onde a função é definida), um conjunto B, chamado o *contradomínio* (ou conjunto onde a função toma valôres), e uma regra que permite associar, de modo bem determinado, a cada elemento $x \in A$, um único elemento $f(x) \in B$, chamado o *valor* que a função assume em x (ou no ponto x). Muitas vêzes se diz "a função f" em vez de "a função $f : A \to B$", deixando subentendidos o domínio A e o contradomínio B.

A natureza da regra que ensina como obter o valor $f(x) \in B$ quando é dado $x \in A$ é inteiramente arbitrária, sendo sujeita apenas a duas condições: 1) Não deve haver exceções; para que a função f tenha A como domínio, a regra deve fornecer $f(x)$ para *todo* $x \in A$. 2) Não deve haver ambigüidade; a cada $x \in A$ a regra deve fazer corresponder um *único* $f(x) \in B$. Não existe tal coisa como uma "função plurívoca".

Sinônimos de função: *aplicação, transformação, operador*. Neste livro, atendendo à tradição geométrica, usaremos de preferência o têrmo *aplicação*, reservando a palavra *função* para aplicações que assumem valôres numéricos.

De acôrdo com a definição acima, para que duas aplicações $f : A \to B$, $g : A' \to B'$ sejam *iguais* é necessário e suficiente que $A = A'$, $B = B'$ e $f(x) = g(x)$ para todo $x \in A$.

Às vêzes, especialmente em diagramas, usamos a notação $A \xrightarrow{f} B$ para indicar uma aplicação definida em A e tomando valôres em B.

Chama-se *gráfico* de uma aplicação $f : A \to B$ ao subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $A \times B$ formado pelos pares $(x, f(x))$, onde $x \in A$ é arbitrário. Ou seja,

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in A \times B;\ x \in A\}.$$

Duas aplicações são iguais se, e sòmente se, possuem o mesmo gráfico. Para que um subconjunto $G \subset A \times B$ seja o gráfico de uma aplicação $f : A \to B$, é necessário e suficiente que, para cada $x \in A$, exista exatamente um par $(x, y) \in G$ cuja primeira coordenada é o elemento x dado.

Uma aplicação $f : A \to B$ diz-se *biunívoca* quando, dados $x, y \in A$ quaisquer, $f(x) = f(y)$ implica $x = y$. Em outras palavras, f é biunívoca quando $x \neq y$ implica $f(x) \neq f(y)$.

Uma aplicação $f : A \to B$ diz-se *sôbre* B quando, para todo $y \in B$ existe um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Por exemplo, dado o conjunto $N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ dos números inteiros positivos, definamos uma aplicação $f : N \to N$ pondo $f(n) = n^2$ para todo $n \in N$. A aplicação f é biunívoca mas não é sôbre N. Por outro lado, se definirmos $g : N \to N$ pondo, para cada $n \in N$, $g(n) =$ número de fatôres primos da decomposição de n, veremos que g é sôbre N, porém não biunívoca.

Uma aplicação $f : A \to B$, biunívoca e sôbre B, chama-se uma *correspondência biunívoca* entre A e B.

Por exemplo, seja N o conjunto dos números inteiros positivos e seja B o conjunto dos inteiros positivos pares. A aplicação $f : N \to B$, definida por $f(n) = 2n$, é uma correspondência biunívoca entre N e B.

Dadas uma aplicação $f : A \to B$ e uma parte $X \subset A$, chama-se *imagem de* X pela aplicação f ao conjunto $f(X)$ de todos os valôres $f(x)$ que f assume nos pontos $x \in X$, isto é:

$$f(X) = \{f(x);\ x \in X\}.$$

Evidentemente, $f(X)$ é um subconjunto de B. Para que $f : A \to B$ seja sôbre B, é necessário e suficiente que $f(A) = B$. Em geral, tem-se apenas $f(A) \subset B$. O conjunto $f(A)$ é chamado a *imagem da aplicação* $f : A \to B$. Às vêzes também se diz que $f(A)$ é o conjunto dos valôres de f.

Dada uma aplicação $f : A \to B$ e indicando com $X, Y, \ldots$ subconjuntos genéricos de A, temos:

$$\begin{aligned} f(X \cup Y) &= f(X) \cup f(Y); \\ f(X \cap Y) &\subset f(X) \cap f(Y); \\ X \subset Y &\Rightarrow f(X) \subset f(Y); \\ f(\varnothing) &= \varnothing. \end{aligned}$$

Quando f é biunívoca, tem-se $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$ mas, se existem em A elementos $x \neq y$ com $f(x) = f(y)$, então, pondo $X = \{x\}$ e $Y = \{y\}$, teremos $X \cap Y = \varnothing$, donde $f(X \cap Y) = \varnothing$, mas $f(X) \cap f(Y) = f(x)$.

Quanto à diferença entre conjuntos, é válida a relação $f(X - Y) \supset f(X) - f(Y)$. Quando f é biunívoca, tem-se o resultado mais forte: $f(X - Y) = f(X) - f(Y)$.

Dada a aplicação $f : A \to B$, consideremos um subconjunto $Z \subset B$. A *imagem inversa* de Z por f é o conjunto $f^{-1}(Z)$ dos elementos de A que se aplicam por f em elementos de Z. Isto é:

$$f^{-1}(Z) = \{x \in A;\ f(x) \in Z\}.$$

Note-se que se pode ter $f^{-1}(Z) = \varnothing$ sem que Z seja vazio. Isto acontece precisamente quando $Z \cap f(A) = \varnothing$, isto é, quando Z não tem pon-

tos em comum com a imagem de f. Em particular, f então não é sôbre B. Dado $z \in B$, pode ocorrer que $f^{-1}(\{z\}) = f^{-1}(z)$ seja um subconjunto de A com mais de um elemento. Isto se dá sòmente quando f não é biunívoca.

As imagens inversas se comportam bem relativamente às operações com conjuntos. São válidas as seguintes propriedades, onde Z e W indicam subconjuntos do contradomínio B:

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(Z \cup W) &= f^{-1}(Z) \cup f^{-1}(W);\\
f^{-1}(Z \cap W) &= f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(W);\\
f^{-1}(Z - W) &= f^{-1}(Z) - f^{-1}(W);\\
Z \subset W &= f^{-1}(Z) \subset f^{-1}(W);\\
f^{-1}(B) &= A,\ f^{-1}(\varnothing) = \varnothing.
\end{aligned}
$$

Dado $X \subset A$, temos $f^{-1}(f(X)) \supset X$ e, dado $Z \subset B$, vale $f(f^{-1}(Z)) \subset Z$. Para que $f^{-1}(f(X)) = X$ seja qual fôr $X \subset A$, é necessário e suficiente que f seja biunívoca. Anàlogamente, f é sôbre B se, e sòmente se, $f(f^{-1}(Z)) = Z$ para todo $Z \subset B$.

Sejam as aplicações $f : A \to B$ e $g : B \to C$. A *aplicação composta* $g \circ f : A \to C$ consiste em aplicar primeiro f e depois g. Ou seja, para todo $x \in A$, pomos $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Dadas $f : A \to B$, $g : B \to C$ e $h : C \to D$, vale a associatividade $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f : A \to D$. Dado um subconjunto $W \subset C$, tem-se $(g \circ f)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W))$.

Seja X um subconjunto de A. A aplicação $i : X \to A$, definida por $i(x) = x$ para todo $x \in A$, chama-se a *aplicação de inclusão de* X *em* A. Em particular, quando $X = A$, a aplicação de inclusão de A em A, chama-se a *aplicação identidade* de A e indica-se com $\text{id.}_A : A \to A$. Às vêzes, por simplicidade, escreveremos apenas $\text{id.} : A \to A$.

Dados uma aplicação $f : A \to B$ e um subconjunto $X \subset A$, a *restrição de* f *ao subconjunto* X é a aplicação $f|X : X \to B$ definida por $(f|X)(x) = f(x)$ para todo $x \in X$. Tem-se $f|X = f \circ i$, onde $i : X \to A$ é a inclusão de X em A. Por outro lado, dada uma aplicação $g : X \to B$, tôda aplicação $f : A \to B$ tal que $g = f|X$ chama-se uma *extensão de* g *ao conjunto* A.

Dada uma aplicação $f : A \to B$, chama-se *inversa à direita* de f uma aplicação $g : B \to A$ (se existir) tal que $f \circ g = \text{id.}_B$, isto é, $f(g(z)) = z$ para todo $z \in B$. Para que exista uma inversa à direita de f é necessário e suficiente que f seja sôbre B. Anàlogamente, diz-se que $h : B \to A$ é uma *inversa à esquerda* de f quando $h \circ f = \text{id.}_A$, isto é, $h(f(x)) = x$ para todo $x \in A$. A fim de que f possua uma inversa à esquerda é necessário e suficiente que f seja biunívoca. Finalmente, diz-se que uma aplicação $f^{-1} : B \to A$ é uma *inversa* de f quando $f \circ f^{-1} = \text{id.}_B$ e $f^{-1} \circ f = \text{id.}_A$, isto é, quando f^{-1} é, ao mesmo tempo, uma inversa à direita e à esquerda de f. Logo, f possui uma inversa se, e sòmente se, fôr uma correspondência biu-

nívoca entre A e B. Nestas condições, a inversa não sòmente existe, mas é única. Se $f : A \to B$ e $g : B \to C$ são aplicações biunívocas sôbre, então $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} : C \to A$.

§ 4. Famílias: Reunião, Interseção e Produto Cartesiano

Seja L um conjunto, cujos elementos chamaremos *índices* e representaremos genèricamente por λ. Dado um conjunto arbitrário X, uma *família* de elementos de X com índices em L é uma aplicação $x : L \to X$. Dada uma família x, indicaremos o valor de x no elemento $\lambda \in L$ por x_λ, em vez da notação usual $x(\lambda)$. A família x é indicada também pelo símbolo $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$ ou simplesmente (x_λ), quando não houver dúvida sôbre o conjunto de índices L.

Quando $L = \{1, 2, \ldots, n\}$ é o conjunto dos inteiros positivos desde 1 até um inteiro fixo n, as famílias $x : L \to X$ chamam-se *n-uplas de elementos de X*. Uma n-upla $x = (x_i)_{i \in L}$ é comumente representada pelo símbolo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Como sabemos, $x_i = x(i)$ é o valor de x no elemento i. É costume chamar x_i a *i-ésima coordenada* da n-upla $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Em particular, um par ordenado (a, b), $a \in A$, $b \in B$, é uma 2-upla no conjunto $A \cup B$.

Uma família num conjunto X com índice no conjunto $N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ dos inteiros positivos é chamada uma *seqüência de elementos de X*. Uma tal seqüência é pois uma função $x : N \to X$, indicada por $x = (x_n)$, ou por $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, sendo o valor da aplicação x no elemento $n \in N$ indicado por x_n e chamado o *n-ésimo têrmo da seqüência x*.

Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de conjuntos A_λ com índices em L. A *reunião* dessa família é o conjunto dos elementos que pertencem a pelo menos um dos A_λ. Escreve-se:

$$\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = \{x;\ \text{existe } \lambda \in L \text{ com } x \in A_\lambda\}.$$

Ou seja, $\bigcup A_\lambda$ é o conjunto dos x tais que x pertence a algum A_λ.

Anàlogamente, a *interseção* da família $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é o conjunto dos elementos que pertencem simultâneamente a todos os conjuntos da família. Põe-se

$$\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda = \{x;\ x \in A_\lambda \text{ para todo } \lambda \in L\}.$$

Em particular, quando $L = N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, é costume escrever-se $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ em vez de $\bigcup_{n \in N} A_n$ e $\bigcap_{n \in N} A_n$.

Dadas duas famílias de conjuntos $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ e $(B_\mu)_{\mu \in M}$, obtém-se as famílias com índices em $L \times M$:

$$(A_\lambda \cap B_\mu)_{(\lambda, \mu) \in L \times M} \quad \text{e} \quad (A_\lambda \cup B_\mu)_{(\lambda, \mu) \in L \times M}.$$

Valem as seguintes propriedades:

$$(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda) \cap (\bigcup_{\mu \in M} B_\mu) = \bigcup_{(\lambda, \mu) \in L \times M} (A_\lambda \cap B_\mu)$$

$$(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda) \cup (\bigcap_{\mu \in M} B_\mu) = \bigcap_{(\lambda, \mu) \in L \times M} (A_\lambda \cup B_\mu).$$

Tem-se ainda:

$$X - \bigcup_{\lambda \in L} Y_\lambda = \bigcap_{\lambda \in L} (X - Y_\lambda)$$

$$X - \bigcap_{\lambda \in L} Y_\lambda = \bigcup_{\lambda \in L} (X - Y_\lambda).$$

Com relação às aplicações, temos:

$$f(\bigcup A_\lambda) = \bigcup f(A_\lambda); \quad f(\bigcap A_\lambda) \subset \bigcap f(A_\lambda);$$

$$f^{-1}(\bigcup A_\lambda) = \bigcup f^{-1}(A_\lambda); \quad f^{-1}(\bigcap A_\lambda) = \bigcap f^{-1}(A_\lambda).$$

A noção de família permite generalizar também o conceito de produto cartesiano. Consideremos inicialmente o caso finito.

Dados os conjuntos $A_1, \ldots, A_n$, seu produto cartesiano é o conjunto $A = A_1 \times \ldots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$, formado por tôdas as n-uplas $a = (a_1, \ldots, a_n)$ tais que $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$. Em outras palavras, $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ é o conjunto de tôdas as aplicações $a : \{1, 2, \ldots, n\} \to A_1 \cup \ldots \cup A_n$ tais que $a(i) = a_i \in A_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Isto estende o produto cartesiano $A \times B$ visto acima. Quando $A_r = \ldots = A_n = A$, o produto cartesiano $A \times \ldots \times A$ de n cópias de A é indicado com A^n. No produto cartesiano $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ são importantes as *projeções* $p_i : A \to A_i$ sôbre cada fator A_i. A i-ésima projeção p_i é definida por $p_i(a) = a_i = i$-ésima coordenada da n-upla $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Dados $a = (a_1, \ldots, a_n)$ e $b = (b_1, \ldots, b_n)$ em $A_1 \times \ldots \times A_n$, tem-se $a = b$ se, e sòmente se, $p_i(a) = p_i(b)$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$.

Mais geralmente, dada uma família qualquer $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos, seu produto cartesiano $A = \prod_{\lambda \in L} A_\lambda$ é o conjunto das famílias $a = (a_\lambda)_{\lambda \in L}$ tais que, para cada $\lambda \in L$, $a_\lambda \in A_\lambda$. Em outras palavras, A é o conjunto de tôdas as aplicações $a : L \to \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ tais que $a(\lambda) = a_\lambda \in A_\lambda$ para cada $\lambda \in L$. As projeções $p_\lambda : A \to A_\lambda$ são definidas por $p_\lambda(a) = a_\lambda$. Cada projeção p_λ

é uma aplicação de A sôbre A_λ. Dada uma aplicação $f : X \to \Pi A_\lambda$ de um conjunto qualquer X no produto cartesiano dos A_λ, obtém-se, para cada $\lambda \in L$, uma aplicação $f_\lambda : X \to A_\lambda$, pondo-se $f_\lambda = p_\lambda \circ f$, ou seja, $f_\lambda(x) = \lambda$-ésima coordenada de $f(x)$. Recìprocamente, se é dada, para cada $\lambda \in L$, uma aplicação $f : X \to A_\lambda$ tal que $f_\lambda = p_\lambda \circ f$ para cada λ. Basta pôr $f(x) = (f_\lambda(x))_{\lambda \in L}$.

No caso particular em que todos os conjuntos A_λ, $\lambda \in L$ são iguais ao mesmo conjunto A, escreve-se A^L em vez de $\prod_{\lambda \in L} A_\lambda$. O conjunto A^L é formado por tôdas as aplicações de L em A.

É costume indicar com $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ o produto cartesiano de uma seqüência $(A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots)$ de conjuntos. Os elementos de ΠA_n são as seqüências $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ tais que $a_n \in A_n$ para cada $n \in N$.

§ 5. Finito, Infinito; Enumerável, não Enumerável

Um conjunto A chama-se *finito* quando fôr vazio ou quando existirem um inteiro positivo n e uma aplicação biunívoca $f : A \to \{1, 2, \ldots, n\}$, de A sôbre o conjunto dos inteiros $1, 2, \ldots, n$. Quando A fôr vazio, diz-se que A possui 0 elementos. No segundo caso, diz-se que A possui n elementos. Demonstra-se que o número n, quando existe, é único.

Diz-se que um conjunto A é *infinito* quando êle não é finito. Isto significa que, seja qual fôr o inteiro positivo n, o conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ está em correspondência biunívoca com uma parte de A mas não existe $n \in N$ algum tal que $\{1, 2, \ldots, n\}$ possa ser pôsto em correspondência com A.

Um conjunto A diz-se *enumerável* quando é finito ou existe uma aplicação biunívoca $f : A \to N$ de A sôbre o conjunto $N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ dos inteiros positivos. (Evidentemente, N é um conjunto infinito.) Alguns autores chamam enumeráveis apenas os conjuntos que estão em correspondência biunívoca com N. A êstes conjuntos chamaremos conjuntos *infinitos enumeráveis*.

Dois conjuntos A e B têm o mesmo *número cardinal* quando existe uma aplicação biunívoca $f : A \to B$ de A sôbre B.

Todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável. O conjunto das partes finitas de um conjunto enumerável é enumerável. Se A e B são conjuntos enumeráveis, então o produto cartesiano $A \times B$ é enumerável e a reunião $A \cup B$ é enumerável. Mas geralmente, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos enumeráveis, então $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ e $A_1 \times \ldots \times A_n$ são ainda enumeráveis. Para a reunião, ainda é verdade que $A_1, \ldots, A_n, \ldots$

enumeráveis implica $A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ enumerável, mas o produto cartesiano $A_1 \times \ldots \times A_n \times \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} A_n$ não é, em geral, enumerável. O conjunto dos números racionais é enumerável. O conjunto dos números reais não é enumerável. Se A é infinito, o conjunto A^A de tôdas as funções de A em A não é enumerável.

Todo conjunto infinito possui um subconjunto infinito enumerável. Isto significa que o número cardinal dos conjuntos infinitos enumeráveis é o "menor" dos números cardinais infinitos.

§ 6. Equivalência

Uma *relação binária* num conjunto A é um subconjunto $R \subset A \times A$ do produto cartesiano de A por si mesmo. Se $(a, b) \in R$, escreve-se aRb e diz-se que a mantém a relação R com b.

Por exemplo, no conjunto dos números inteiros positivos, podemos obter a relação de divisibilidade, considerando o subconjunto $R \subset N \times N$ formado pelos pares (m, n) tais que n é um múltiplo de m. Então, $(m, n) \in R$ (ou seja, mRn) significa que m divide n.

Uma relação de *equivalência* num conjunto A é uma relação binária R com as seguintes propriedades:

Reflexividade: aRa para todo $a \in A$;

Simetria: se aRb, então bRa;

Transitividade: se aRb e bRc, então aRc.

Em têrmos do subconjunto $R \subset A \times A$, as propriedades acima dizem que R contém a diagonal Δ do produto $A \times A$, que R é simétrico relativamente a essa diagonal $[(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R]$ e que $(a, b) \in R$, $(b, c) \in$ $\in R \Rightarrow (a, c) \in R$.

Por exemplo, a relação de igualdade $a = b$ é uma equivalência em qualquer conjunto A. (Neste caso, R coincide com a diagonal de $A \times A$.) Seja A o conjunto dos triângulos do plano. A relação: "o triângulo a e o triângulo b possuem a mesma área" é uma equivalência em A.

Seja R uma relação de equivalência num conjunto A. Para cada elemento $x \in A$ indiquemos com C_x o conjunto de todos os elementos $y \in A$ que são equivalentes a x segundo a relação R:

$$C_x = \{y \in A;\ yRx\}.$$

O conjunto C_x chama-se a *classe de equivalência* de x segundo a relação R. A família $(C_x)_{x \in A}$ goza das seguintes propriedades:

1) $A = \bigcup\limits_{x \in A} C_x$;

2) dados $x, y \in A$, ou $C_x = C_y$ ou $C_x \cap C_y = \varnothing$.

A tôda coleção de subconjuntos de A com as duas propriedades acima, chamaremos uma *partição* de A. As condições acima dizem que os conjuntos de uma partição devem ser dois a dois disjuntos e todo ponto de A está contido em um dêles.

Vemos assim que, dada uma relação de equivalência R num conjunto A, as classes de equivalência segundo R formam uma partição de A. Dois elementos $x, y \in A$ pertencem ao mesmo conjunto da partição se, e sòmente se, xRy. Recìprocamente, tôda partição de A define uma relação de equivalência R, desde que ponhamos xRy para indicar que x e y pertencem ao mesmo conjunto da partição.

O *conjunto quociente* de um conjunto A por uma relação de equivalência R é o conjunto A/R, cujos elementos são as classes de equivalência dos elementos de A segundo a relação R:

$$A/R = \{C_x;\ x \in A\}.$$

Existe uma aplicação natural $\pi : A \to A/R$, definida por $\pi(x) = C_x =$ $=$ classe de equivalência de x. A aplicação π é chamada a *aplicação canônica* de A sôbre A/R. (Evidentemente π é sôbre A/R.)

Se escolhermos, em cada classe de equivalência segundo R, um único elemento daquela classe, o subconjunto $L \subset A$ assim obtido chama-se um *conjunto de representantes* das classes de equivalência. É claro que (salvo no caso trivial em que R é a relação de igualdade) a escolha dos representantes pode ser feita de várias maneiras. Para que $L \subset A$ seja um conjunto de representantes, é necessário e suficiente que a aplicação canônica $\pi : A \to A/R$ transforme L biunìvocamente sôbre A/R.

Qualquer aplicação $f : A \to B$ define uma relação de equivalência R em A, chamada a relação de equivalência determinada por f. Basta pôr aRa' se, e sòmente se, $f(a) = f(a')$. A função f decompõe-se então num produto $f =$ $= i \circ f' \circ \pi$, onde $\pi : A \to A/R$ é a aplicação canônica, $i : f(A) \to B$ é a inclusão e $f' : A/R \to f(A)$ é uma correspondência biunívoca, definida por $f'(\pi(x)) =$ $= f(x)$. O diagrama acima é clássico.

§ 7. Ordem

Uma *relação de ordem* num conjunto A é uma relação binária em A, indicada geralmente com o símbolo $\leq$, gozando das seguintes propriedades:

1) *Reflexiva*: $a \leq a$ para todo $a \in A$;
2) *Anti-simétrica*: se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$;
3) *Transitiva*: se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$.

Por exemplo, a relação de inclusão $X \subset Y$ é uma relação de ordem definida no conjunto $\mathfrak{P}(A)$ das partes de um conjunto A. O conjunto Z dos números inteiros relativos possui uma relação de ordem natural, onde se escreve $n \leq m$, se, e sòmente se, a diferença $m - n$ é um número positivo ou nulo.

Um *conjunto ordenado* é um conjunto munido de uma relação de ordem nêle definida. Todo subconjunto de um conjunto ordenado pode naturalmente ser considerado ordenado. Note-se que, dados um conjunto ordenado A e dois elementos arbitrários $a, b \in A$ pode acontecer que nem $a \leq b$ nem $b \leq a$. (Vide relação de inclusão.) Um conjunto A diz-se *totalmente ordenado*, ou *linearmente ordenado* quando nêle está definida uma relação de ordem tal que, dados arbitràriamente $a, b \in A$, ou $a \leq b$ ou $b \leq a$. O conjunto A dos números inteiros relativos é totalmente ordenado. O mesmo se dá com o conjunto Q dos números racionais. Às vêzes, para dar ênfase ao fato de que um conjunto ordenado A não é linearmente ordenado, diz-se que A é *parcialmente ordenado*. Um conjunto linearmente ordenado é às vêzes chamado uma *cadeia*.

Num conjunto ordenado A, um elemento a chama-se o *primeiro elemento*, ou o *menor elemento* de A quando se tem $a \leq x$ para todo $x \in A$. Um conjunto ordenado A pode não possuir um primeiro elemento (exemplo: o conjunto Z dos números inteiros relativos) mas, se possuir, êle é único, em virtude da propriedade anti-simétrica da relação de ordem. Anàlogamente, o *maior elemento*, ou *último elemento* de um conjunto ordenado A, se existir, é um elemento $b \in A$ tal que $x \leq b$, seja qual fôr $x \in A$. O conjunto N dos números inteiros positivos tem um primeiro elemento, que é o número 1. O conjunto $\mathfrak{P}(A)$ das partes de um conjunto A (ordenado por inclusão) tem como primeiro elemento o conjunto vazio $\varnothing$.

Um elemento a de um conjunto ordenado A chama-se um *elemento mínimo* de A quando não existe em A nenhum elemento x tal que $x \leq a$ e $x \neq a$. (Escreve-se $x < a$ para indicar que $x \leq a$ e $x \neq a$.) Não se deve confundir "elemento mínimo" com "menor elemento". Seja $\mathfrak{A}$ o conjunto das partes não-vazias de um conjunto B. Ordenando $\mathfrak{A}$ por inclusão,

os pontos $x \in B$ são os elementos mínimos de $\mathfrak{A}$. Salvo no caso em que B possui um único elemento, $\mathfrak{A}$ não possui menor elemento. É claro que se um conjunto ordenado A possui um primeiro elemento, êle é o seu único elemento mínimo.

Seja S um subconjunto de um conjunto ordenado A. Um elemento $a \in A$ chama-se um *limite superior* de S se $x \leq a$ para todo $x \in S$. Diz-se também que a é uma *cota superior* de S. De modo semelhante, se define um limite inferior, ou uma cota inferior de S. Quando a é uma cota superior do conjunto S, diz-se que os elementos de S são *majorados* por a. Se b é uma cota inferior de S, diz-se que os elementos de S são *minorados* por b. Escreve-se, às vêzes, $S \leq a$ para indicar que a é uma cota superior de S e $b \leq S$ para indicar que b é uma cota inferior de S.

Um conjunto ordenado A diz-se *indutivo superiormente* quando todo subconjunto linearmente ordenado $S \subset A$ possui uma cota superior.

O teorema abaixo será utilizado uma única vez neste livro. (Vide demonstração do Teorema de Tychonov, Cap. IX, § 4.)

Teorema de Zorn — *Todo conjunto não-vazio indutivo superiormente possui elementos máximos.*

Evidentemente, o Teorema de Zorn também pode ser enunciado dizendo-se que todo conjunto não-vazio indutivo inferiormente possui elementos mínimos.

Bem menos evidente é o fator de que o Teorema de Zorn é equivalente ao chamado Axioma da Escolha, um princípio básico da teoria dos conjuntos, o qual afirma que, dada uma coleção não-vazia $\mathfrak{C}$ de conjuntos não-vazios X é possível formar um conjunto A, escolhendo em cada $x \in \mathfrak{C}$ precisamente um elemento X. O Axioma da Escolha é equivalente à afirmação de que o produto cartesiano ΠA_λ de uma família não-vazia de conjuntos não-vazios A_λ é, por sua vez, um conjunto não-vazio.

Muitas vêzes, no decorrer de argumentos no texto, usaremos o Axioma da Escolha, sem maiores comentários.

§ 8. Números Reais

Indicaremos o conjunto dos números reais com R. Êle consiste dos números racionais, cujo conjunto indicaremos com Q, e mais os números irracionais. Não adotaremos símbolo especial para o conjunto dos números irracionais.

Freqüentemente nos referiremos ao conjunto R dos números reais como a *reta*. Às vêzes diremos a *reta real*. De especial importância é a relação de ordem (linear) entre os números reais. Escreveremos $a \leq b$ para in-

dicar que $b - a$ é um número real positivo ou zero. Em outras palavras, $a \leq b$ significa que $b - a \geq 0$. Em coerência com a linguagem geométrica, chamaremos também de *pontos da reta* aos números reais e diremos que o ponto $b \in R$ está *à direita* do ponto $a \in R$ quando $a < b$, No mesmo caso, a diz-se situado *à esquerda* de b.

O conjunto $[a, b] = \{x \in R; a \leq x \leq b\}$ é chamado o *intervalo fechado* de extremos a e b. (Agora, como abaixo, $a, b \in R$ e $a < b$.) Anàlogamente, poremos

$$(a, b) = \{x \in R; a < x < b\} = \text{intervalo aberto de extremos } a, b,$$
$$[a, b) = \{x \in R; a \leq x < b\}, (a, b] = \{x \in R; a < x \leq b\},$$
$$(a, +\infty) = \{x \in R; a < x\}, (-\infty, b) = \{x \in R; x < b\},$$
$$[a, +\infty) = \{x \in R; a \leq x\}, (-\infty, b] = \{x \in R; x \leq b\}.$$

Os intervalos da forma $[a, b)$, $(a, b]$ são chamados *semi-abertos*. Os intervalos da forma $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$ etc. são também chamados *semi-retas*.

Um conjunto S de números reais diz-se *limitado superiormente* quando existe um número real a tal que $x \leq a$ para todo $x \in S$. De maneira análoga se define um conjunto *limitado inferiormente*. Um conjunto $S \subset R$ diz-se *limitado* quando é limitado inferiormente e superiormente, isto é, quando existem números reais a, b tais que $a \leq x \leq b$ para todo $x \in S$, ou seja, $S \subset [a, b]$. Quando $x \leq a$ para todo $x \in S$, o número a chama-se uma *cota superior* do conjunto S. Semelhantemente, $b \leq x$ para todo $x \in S$ significa que b é uma *cota inferior* para S.

A distinção fundamental entre R e Q reside no fato de que todo conjunto X não-vazio de números reais que é limitado superiormente possui um *supremo* $s = \sup. X$, que é um número real com as seguintes propriedades:

1) para todo $x \in X$, tem-se $x \leq s$ (isto é, s é uma cota superior de X);

2) se t é um número real tal que $x \leq t$ para todo $x \in X$, então $s \leq t$ (isto é, s é a menor das cotas superiores de X).

A propriedade segunda, acima, significa que nenhum número menor do que $\sup. X = s$ pode ser uma cota superior de X. Por isso, ela se exprime também do seguinte modo:

3) dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $s - \epsilon < x \leq s$.

O supremo de um conjunto X pode pertencer ou não ao conjunto X.

De maneira semelhante se define o *ínfimo* de um conjunto X não-vazio de números reais, para o qual se usa a notação $\inf. X = i$. O ínfimo i é definido pelas seguintes propriedades:

1) tem-se $i \leq x$, para todo $x \in X$ (em outras palavras, i é uma cota inferior de X);

2) se $j \leq x$ para todo $x \in X$, então $j \leq i$ (ou seja, i é a maior das cotas inferiores de X).

A segunda propriedade do ínfimo pode ser equivalentemente formulada do seguinte modo:

3) dado qualquer número real $\epsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $i \leq x < i + \epsilon$.

Todo conjunto X, não-vazio, de números reais que é limitado inferiormente possui um ínfimo $i = \text{inf.}\, X$, o qual é um número real. O ínfimo de X pode pertencer a X ou não.

Evidentemente sup. X e inf. X são unìvocamente determinados pelas propriedades que os definem.

Quando um conjunto X não é limitado superiormente, escreve-se $\text{sup.}\, X = +\infty$. Anàlogamente, $\text{inf.}\, X = -\infty$ serve para exprimir que X não é limitado inferiormente. Às vêzes também se convenciona escrever $\text{sup.}\, \emptyset = -\infty$ e $\text{inf.}\, \emptyset = +\infty$.

Se $X \subset Y$ e $X \neq \emptyset$, então $\text{sup.}\, X \leq \text{sup.}\, Y$ e $\text{inf.}\, Y \leq \text{inf.}\, X$. Se escrevermos $X + Y = \{x + y; x \in X, y \in Y\}$, então teremos $\text{sup.}\, (X + Y) = \text{sup.}\, X + \text{sup.}\, Y$ e $\text{inf.}\, (X + Y) = \text{inf.}\, X + \text{inf.}\, Y$.

§ 9. Espaços Vetoriais

Um *espaço vetorial* (real) é um conjunto E, onde estão definidas duas operações. A primeira é a *adição* de elementos $x, y \in E$, dando como resultado um elemento $x + y \in E$. Os elementos do espaço vetorial E são chamados vetores e a adição de vetores deve gozar das seguintes propriedades:

1) $x + y = y + x$, quaisquer que sejam $x, y \in E$;

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$, sejam quais forem $x, y, z \in E$;

3) existe $0 \in E$ (chamado o *vetor zero*, ou a *origem* de E) tal que $0 + x = x$ para todo $x \in E$;

4) a cada $x \in E$ corresponde um vetor $-x \in E$ tal que $x + (-x) = 0$.

O vetor $-x$ chama-se o *simétrico* de x.

A segunda operação definida em E é a *multiplicação de um vetor $x \in E$ por um número real $\alpha \in E$*, dando como resultado um vetor $\alpha x \in E$. Esta operação deve satisfazer o seguinte:

1) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, para todo $\alpha \in R$ e quaisquer $x, y \in E$;

2) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in R, x \in E$;

3) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, idem;

4) $1 \cdot x = x$, para todo $x \in E$.

Segue-se dêstes axiomas que $0 \cdot x = 0$ (onde, no primeiro membro, $0 \in R$, e no segundo $0 \in E$), que $(-1)x = -x$ e que valem, em geral, tôdas as regras operacionais óbvias.

Um subconjunto não-vazio F de um espaço vetorial E chama-se um *subespaço* de E quando $x, y \in F$ implica $x + y \in F$ e $x \in F$ implica $\alpha x \in F$ para todo $\alpha \in R$. Dado um subespaço $F \subset E$ e um vetor $a \in E$, o conjunto $a + F = \{a + x;\ x \in F\}$ chama-se a *variedade afim* paralela a F e passando pelo ponto a.

Sejam E e F espaços vetoriais. Uma aplicação $f : E \to F$ chama-se uma *transformação linear* quando $f(x + y) = f(x) + f(y)$ e $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ quaisquer que sejam $x, y \in E$, α escalar.

§ 10. Referências

Todo o material referente a conjuntos, funções, relações de equivalência, ordem e números cardinais aqui mencionado, acha-se exposto, de forma legível e atraente, no livro: *Naive Set Theory* — por P. R. Halmos (Van Nostrand, 1960).

Uma exposição bastante clara, mas sem demonstrações nem comentários, do mesmo material é a seguinte: *Théorie des Ensembles — Fascicule de Résultats* — por N. Bourbaki (Hermann, 1937).

Para uma exposição curta, completa e compreensível da construção dos inteiros, racionais e reais a partir dos conhecimentos básicos sôbre conjuntos, veja-se: *The Structure of the Real Number System* — por L. W. Cohen e G. Ehrlich (Van Nostrand, 1963).

Como referência auxiliar para os assuntos tratados nos livros acima citados e para uma exposição de Álgebra Linear, sugerimos o texto clássico: *A Survey of Modern Algebra* — por G. Birkhoff e S. Mac Lane (MacMillan, 1965).

Espaços Métricos

Capítulo I

§ 1. Introdução

Uma das idéias mais importantes da Matemática é a de continuidade, a qual se acha estreitamente relacionada com os conceitos de convergência e limite. Dada uma aplicação $f : X \to Y$ definida num conjunto X e tomando valôres num conjunto Y, diz-se que f é *contínua* no ponto $a \in X$ quando é possível tornar $f(x)$ arbitràriamente próximo de $f(a)$, desde que se tome x suficientemente próximo de a. Anàlogamente, diz-se que uma seqüência de pontos (x_n), $n = 1, 2, 3, \ldots$, pertencentes a um conjunto X, *converge* para o ponto $a \in X$ quando é possível tornar x_n arbitràriamente próximo de a, desde que se tome n suficientemente grande. Observa-se que essas definições de continuidade e convergência não têm sentido em conjuntos quaisquer X, Y. Para que elas signifiquem algo é necessário que nos conjuntos em questão exista alguma estrutura que permita falar em "proximidade" de pontos. Tais conjuntos são chamados espaços topológicos. Nêles são definidas e tomam valôres as funções contínuas. Chama-se Topologia à disciplina matemática que se ocupa do estudo das funções contínuas de um espaço topológico em outro.

Ora, a maneira mais natural de verificar qual de dois pontos x, y, pertencentes a um conjunto X, está mais próximo de um ponto $a \in X$ é medir as distâncias de x e y ao ponto a. Isto, porém, só será possível se existir a noção de *distância*, já prèviamente definida no conjunto X. Assim, os conjuntos onde tem sentido falar na distância entre dois pontos se apresentam imediatamente como espaços topológicos. Tais conjuntos são denominados espaços métricos. Entretanto, nem todos os espaços topológicos são métricos; existem alguns espaços topológicos importantes, onde o grau de proximidade de um ponto x a um ponto a não é determinado pela distância de x a a. Travaremos contato com tais espaços a partir do Cap. III.

A maioria dos espaços topológicos normalmente encontrados na Matemática vem munida de uma métrica. Além disso, a topologia que deriva de uma noção de distância deixa pouca margem para a especulação de exemplos artificiais ou patológicos que desviam a atenção do principiante dos fatos fundamentais. Por tais motivos, faremos dos espaços métricos o tema central desta introdução à Topologia.

O conceito de espaço métrico é devido a Maurice Fréchet, que o introduziu em 1906, em sua famosa tese, juntamente com outras noções que se tornaram clássicas em Topologia. Os axiomas de Fréchet representam um refinamento matemático da noção de distância, tal como a concebemos na vida comum.

§ 2. Definição de Espaço Métrico

Uma *métrica* num conjunto M é uma função $d : M \times M \to R$ que associa a cada par de pontos $x, y \in M$ um número real $d(x, y)$, chamado a *distância* do ponto x ao ponto y, de tal modo que:

1) $d(x, x) = 0, d(x, y) > 0$ se $x \neq y$;
2) $d(x, y) = d(y, x)$;
3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$; quaisquer que sejam $x, y, z \in M$.

A propriedade 3) chama-se "desigualdade triangular", pois exprime que cada lado de um triângulo não excede a soma dos outros dois.

Um *espaço métrico* é um par (M, d) formado por um conjunto M e uma métrica d em M.

Por comodidade, sempre que não houver perigo de confusão, nos referiremos ao "espaço métrico M", deixando subentendida a métrica d.

EXEMPLOS

1. O exemplo mais importante de espaço métrico é, sem dúvida, o conjunto R dos números reais, munido da métrica $d(x, y) = |x - y| =$ = valor absoluto da diferença $x - y$. Referir-nos-emos ao espaço métrico R como "a reta real" ou simplesmente "a reta".

2. Em seguida à reta, vêm os espaços euclidianos numéricos R^n. Para $n = 1$ temos $R^1 = R =$ reta real. R^2 é o plano (euclidiano real), isto é, o conjunto de todos os pares ordenados $x = (x^1, x^2)$, $y = (y^1, y^2), \ldots$ de números reais, com a métrica definida por

$$d(x, y) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2}.$$

De um modo geral, se n é um número inteiro positivo qualquer, R^n é o produto cartesiano de R por si mesmo n vêzes, isto é, é o conjunto de tôdas as n-uplas reais $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, \ldots, y^n)$ etc., com a métrica:

$$d(x, y) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + \ldots + (x^n - y^n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2}.$$

Temos, naturalmente, de verificar que a função d acima definida satisfaz às condições exigidas para uma métrica. É evidente que $d(x, x) = 0$, $d(x, y) > 0$ se $x \neq y$ e que $d(x, y) = d(y, x)$. Resta portanto verificar apênas a desigualdade triangular. Sejam $x = (x^1, \ldots, x^n)$, $y = (y^1, \ldots, y^n)$ e $z = (z^1, \ldots, z^n)$ três pontos arbitrários em R^n. Temos de provar que

$$\sqrt{\Sigma\,(x^i - z^i)^2} \leq \sqrt{\Sigma(x^i - y^i)^2} + \sqrt{\Sigma(y^i - z^i)^2},$$

isto é, pondo $x^i - y^i = a^i$ e $y^i - z^i = b^i$ $(i = 1, \ldots, n)$, que

$$\sqrt{\Sigma(a^i + b^i)^2} \leq \sqrt{\Sigma(a^i)^2} + \sqrt{\Sigma(b^i)^2}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, vemos que isto equivale a mostrar que

$$\Sigma(a^i)^2 + \Sigma(b^i)^2 + 2\Sigma a^ib^i \leq \Sigma(a^i)^2 + \Sigma(b^i)^2 + 2\sqrt{\Sigma(a^i)^2} \cdot \sqrt{\Sigma(b^i)^2},$$

o que é equivalente a

$$\Sigma a^ib^i \leq \sqrt{\Sigma(a^i)^2} \cdot \sqrt{\Sigma(b^i)^2}.$$

Esta última desigualdade, por sua vez, é conseqüência da famosa desigualdade de Cauchy:

$$(\Sigma a^ib^i)^2 \leq [\Sigma(a^i)^2] \cdot [\Sigma(b^i)^2].$$

A fim de demonstrar a desigualdade de Cauchy, observamos que:

1) se $\Sigma(b^i)^2 = 0$, então $b^i = 0$, $i = 1, \ldots, n$; portanto,

$$[\Sigma\, a^ib^{i2}] = 0 = [\Sigma(a^i)^2]\,[\Sigma(b^i)^2];$$

2) se $\Sigma(b^i)^2 > 0$, o trinômio do 2.º grau em λ:

$$[\Sigma(b^i)^2]\,\lambda^2 + 2\,[\Sigma\, a^ib^i]\,\lambda + \Sigma(a^i)^2 = \Sigma(a^i + \lambda b^i)^2 \geq 0$$

para qualquer valor real de λ. Logo, seu discriminante deve ser menor do que ou igual a zero, isto é,

$$4[\Sigma a^ib^i]^2 - 4\,[\Sigma(a^i)^2]\,[\Sigma(b^i)^2] \leq 0,$$

o que estabelece a desigualdade desejada.

3. Uma *norma* num espaço vetorial E, sôbre o corpo dos números reais ou complexos, é uma função que associa a cada vetor $x \in E$ um número real $|x|$, chamado a *norma de* x, de tal maneira que:

a) $|0| = 0$ e $|x| > 0$ se $x \neq 0$;
b) $|\lambda \cdot x| = |\lambda| \cdot |x|$ seja qual fôr o escalar λ;
c) $|x + y| \leq |x| + |y|$ quaisquer que sejam $x, y \in E$.

Um *espaço vetorial normado* é um par formado por um espaço vetorial E e uma norma $x \to |x|$ em E. Por exemplo, a função $|x| = \sqrt{\Sigma(x^i)^2}$ é uma norma no espaço vetorial R^n. (A verificação da propriedade $|x + y| \leq$ $\leq |x| + |y|$, única não-trivial, está contida no exemplo acima.) Todo espaço vetorial normado E possui uma métrica natural, definida a partir da norma por

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Além das propriedades requeridas para uma métrica (as quais se verificam fàcilmente a partir da definição de norma), a distância definida por uma norma satisfaz ainda a: $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ (é invariante por translações) e $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot d(x, y)$.

A métrica definida em R^n no exemplo anterior provém da norma $|x| = \sqrt{\Sigma(x^i)^2}$. Salvo menção explícita em contrário, consideraremos sempre o espaço R^n como provido dessa norma e da métrica que dela se origina.

Outras normas que poderíamos introduzir no espaço R^n seriam, por exemplo:

$$|x|' = |x^1| + \ldots + |x^n|, \quad \text{ou}$$
$$|x|'' = \text{máx.}\,\{|x^1|, \ldots, |x^n|\},$$

as quais dariam origem às seguintes métricas no R^n:

$$d'(x, y) = |x^1 - y^1| + \ldots + |x^n - y^n| \quad \text{e}$$
$$d''(x, y) = \text{máx.}\{|x^1 - y^1|, \ldots, |x^n - y^n|\},$$

onde $x = (x^1, \ldots, x^n)$ e $y = (y^1, \ldots, y^n)$.

4. Todo subconjunto X de um espaço métrico M possui uma estrutura natural de espaço métrico. Basta definir a distância entre dois pontos $x, y \in X$ como a mesma distância entre êles considerados como pontos de M. A métrica assim definida em X chama-se a *métrica induzida* em X pela métrica de M e o espaço métrico X assim obtido chama-se um *subespaço* de M. Esta simples observação dá origem a uma grande variedade de exemplos de espaços métricos. Basta, por exemplo, considerar os subconjuntos do espaço euclidiano R^n.

5. Seja M um conjunto qualquer. Podemos definir em M uma métrica d pondo $d(x, x) = 0$ e $d(x, y) = 1$ se $x \neq y$. Isto mostra que qualquer conjunto pode tornar-se um espaço métrico. O espaço dêste modo obtido é bastante trivial, sendo utilizado apenas em contra-exemplos.

§ 3. Mais Definições e Exemplos

Num espaço métrico M, além da distância entre dois pontos $x, y \in M$, podemos também definir a distância de um ponto $x \in M$ a um subconjunto não-vazio $A \subset M$ pela expressão

$$d(x, A) = \inf. \{d(x, a) ; a \in A\}.$$

Assim, a distância $d(x, A)$ do ponto x ao conjunto A é o único número real m tal que:

i) para todo $a \in A$, $m \leq d(x, a)$,

ii) dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < m + \epsilon$.

Um número real m satisfaz a i) se, e sòmente se, $m \leq d(x, A)$; a condição ii) equivale a $m \geq d(x, A)$.

Note-se que se $x \in A$ então $d(x, A) = 0$, mas a recíproca é falsa. Na reta, por exemplo, seja $A = (1, 2)$ o intervalo aberto de extremos 1 e 2. Tem-se $d(1, A) = 0$, $d(2, A) = 0$, sem que $1 \in A$ nem $2 \in A$. Em geral, $d(x, A) = 0$ significa que dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existe $a \in A$ tal que $d(x, a) < \epsilon$, ou seja: "existem pontos de A arbitràriamente próximos do ponto x".

→ PROPOSIÇÃO 1 — *Seja A um subconjunto não-vazio de um espaço métrico M. Quaisquer que sejam $x, y \in M$ tem-se*

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Demonstração: A desigualdade proposta equivale a $-d(x, y) \leq \leq d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$, ou seja, ao par de desigualdades $d(x, A) \leq \leq d(x, y) + d(y, A)$ e $d(y, A) \leq d(y, x) + d(x, A)$. Como x e y são arbitrários, basta demonstrar a primeira destas. Ora, para todo $\epsilon > 0$, existe $a \in A$ tal que $d(y, a) < d(y, A) + \epsilon$. Por outro lado, em virtude da desigualdade triangular, temos $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$. Segue-se que $d(x, a) < d(x, y) + d(y, A) + \epsilon$. Isto mostra que $d(x, A) \leq d(x, y) + + d(y, A)$, como devíamos demonstrar.

COROLÁRIO — *Quaisquer que sejam $x, y, z \in M$, tem-se* $|d(x, z) - - d(y, z)| \leq d(x, y)$. Ou seja: um lado de um triângulo é sempre maior do que ou igual à diferença dos outros dois.

Dados os subconjuntos não-vazios A, B do espaço métrico M, define-se a distância entre êles por

$$d(A, B) = \inf \{d(a, b);\ a \in A,\ b \in B\}.$$

Tem-se $d(A, B) = d(B, A)$, $d(A, A) = 0$, mas os outros axiomas para uma métrica não são satisfeitos. (Para uma métrica definida entre certos subconjuntos de um espaço métrico, ver Exerc. 13.) Por exemplo, no plano R^2, sejam $A = \{(x, 0);\ x \in R\}$ o eixo dos x e $B = \{(x, 1/x);\ x > 0\}$ um ramo de hipérbole. Então $A \neq B$ (mais do que isso: $A \cap B = \emptyset$) mas $d(A, B) = 0$, pois se $a = (x, 0)$ e $b = (x, 1/x)$, $d(a, b) = 1/x$ pode tornar-se tão pequena quanto se deseje, desde que se tome x grande.

Uma aplicação $f : M \to N$, de um espaço métrico M num espaço métrico N, chama-se uma *imersão isométrica* quando

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y),$$

quaisquer que sejam $x, y \in M$. Se, além disso, f é uma aplicação de M *sôbre* N, então diz-se que f é uma *isometria* de M sôbre N, ou uma isometria entre M e N.

Uma imersão isométrica $f : M \to N$ é sempre biunívoca pois se $f(x) = f(y)$, então $0 = d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ e, portanto, $x = y$.

Seja X um conjunto qualquer e $f : X \to M$ uma aplicação biunívoca de X num espaço métrico M. Dados $x, y \in X$, ponhamos $d(x, y) = d(f(x), f(y))$. Isto define uma métrica em X, relativamente à qual f é uma imersão isométrica. Esta chama-se a *métrica induzida em* X pela aplicação f. Como caso particular, a métrica de um subespaço $X \subset M$ é induzida pela aplicação de inclusão $i : X \to M$ ($i(x) = x$, para todo $x \in X$).

As isometrias são os isomorfismos da estrutura de espaço métrico. Dois espaços métricos isométricos são indistinguíveis sob o ponto de vista de propriedades que digam respeito a distâncias.

EXEMPLOS

6. Seja C o conjunto dos números complexos $z = x + iy$. Relativamente às operações $z + z' = (x + x') + i(y + y')$ e $\lambda \cdot z = \lambda x + i(\lambda y)$ (λ real) C é um espaço vetorial normado sôbre os reais, a norma do número complexo $z = x + iy$, sendo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. A aplicação $f : C \to R^2$, definida por $f(x + iy) = (x, y)$ é uma isometria de C sôbre R^2. Sempre que fôr conveniente, identificaremos o conjunto C dos números complexos com o plano R^2 através da aplicação f. C possui uma multiplicação $zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + yx')$ com as pro-

priedades naturais $z(z'z'') = (zz')z''$, $z(z' + z'') = zz' + zz''$, $zz' = z'z$, e cada $z \neq 0$ em C possui um inverso z^{-1} com $zz^{-1} = 1 = 1 + i0$. É para fazer uso dessa multiplicação tão cômoda que se passa, às vêzes, de R^2 para C. Lembramos também a notação de Euler, $e^{i\theta}$, para indicar o número complexo $\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, ou seja, o ponto $(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ do plano.

7. Seja E um espaço vetorial normado. Para cada $a \in E$, a *translação* $T_a : E \to E$, definida por $T_a(x) = x + a$, é uma isometria.

8. Seja $u \in C$ um número complexo de módulo 1, isto é, $u = x + iy$, com $|u| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$. A aplicação $f : C \to C$, definida por $f(z) = u \cdot z$ (multiplicação de números complexos) é uma isometria de C sôbre si mesmo. Com efeito, para quaisquer elementos x, $z \in C$ tem-se:

$$|f(w) - f(z)| = |u \cdot w - u \cdot z| = |u \cdot (w - z)| = |u| \cdot |x - z| = |w - z|.$$

Geomètricamente, f é a rotação do plano C em tôrno da origem, cujo ângulo é θ, onde $u = e^{i\theta}$ e $0 \leq \theta < 2\pi$.

Sejam M um espaço métrico, $r > 0$ um número real e a um ponto de M. A ***bola aberta*** de centro a e raio r é o conjunto $B(a; r)$ de todos os pontos de M cuja distância ao ponto a é inferior a r:

$$B(a; r) = \{x \in M; d(x, a) < r\}.$$

A ***bola fechada*** (ou *disco*) de centro a e raio r é o conjunto $D(a; r)$ dos pontos de M cuja distância ao ponto a é inferior ou igual a r:

$$D(a; r) = \{x \in M;\ d(x, a) \leq r\}.$$

Assim, a bola fechada $D(a; r)$ é formada pela bola aberta $B(a; r)$ e mais os pontos $x \in M$ cuja distância ao ponto a é exatamente igual a r. Êstes últimos pontos formam um conjunto $S(a; r)$, chamado a ***esfera*** de centro a e raio r:

$$S(a; r) = \{x \in M;\ d(x, a) = r\}.$$

Por exemplo, na reta R, a bola aberta $B(a; r)$ é o intervalo aberto $(a - r, a + r)$, a bola fechada de centro a e raio r é o intervalo fechado $D(a; r) = [a - r, a + r]$ e a esfera de centro a e raio r reduz-se a um par de pontos $S(a; r) = \{a - r,\ a + r\}$. Os nomes "bola", "disco" e "esfera" são, naturalmente, motivados pelo espaço euclidiano mas convém observar que, em certos espaços métricos, pode-se ter, por exemplo, $S(a; r) = \varnothing$, ou seja, $B(a; r) = D(a; r)$: basta considerar um subespaço de R^n formado por pontos que estejam todos a uma distância menor do que r do ponto a; em tal subespaço, a esfera $S(a; r)$ é vazia.

No espaço métrico do Ex. 5, qualquer bola aberta de raio ≤ 1 consiste de um ponto apenas: seu centro. Êste mesmo fenômeno ocorre também no

conjunto Z dos números inteiros relativos, com a métrica induzida pela reta R. Tanto o subespaço $Z \subset R$ como o espaço métrico do Ex. 5 são espaços métricos *discretos*, de acôrdo com a definição que daremos agora.

Um ponto a de um espaço métrico M diz-se um *ponto isolado* em M quando existe uma bola aberta de centro a (e raio $r > 0$) que consiste ùnicamente do ponto $a : B(a;\, r) = \{a\}$ para um certo $r > 0$. Um espaço métrico M chama-se *discreto* quando todos os seus pontos são isolados.

EXEMPLO

9. Num espaço vetorial normado $E \neq \{0\}$ (em particular, no R^n) nenhum ponto $a \in E$ é isolado. Com efeito, seja qual fôr $r > 0$, basta tomar $x \neq 0$ qualquer em E e observar que $b = a + \dfrac{r \cdot x}{2|x|}$ é diferente de a e pertence à bola aberta $B(a; r)$, pois $|b - a| = r/2 < r$. Como vimos acima, no espaço M do Ex. 5 e no conjunto Z dos números inteiros, tôda bola aberta de raio 1 contém apenas o seu centro. Por outro lado, seja P o conjunto dos números da forma $1/n$, com n inteiro > 0: $P = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$. Para cada $1/n \in P$, a bola aberta $B(1/n;\, 1/n(n+1))$, de centro $1/n$ e de raio $1/n(n+1)$ em P, contém apenas o seu centro $1/n$, pois de todos os elementos de P (com exceção do próprio $1/n$) o mais próximo de $1/n$ é $1/(n+1)$, cuja distância a $1/n$ é igual a $1/n(n+1)$. Portanto, todos os pontos de P são isolados e assim P é um espaço métrico discreto. Se considerarmos, porém, o espaço $P^* = P \cup \{0\}$, ainda com a métrica induzida da reta, P^* não será discreto, pois o ponto 0 não é isolado em P^*. Com efeito, dado $r > 0$ arbitrário, existe um número natural $n > 1/r$ e então $1/n < r$, donde $1/n$ pertence à bola de centro 0 e raio r em P^*.

Proposição 2 — *Dados dois pontos distintos a, b num espaço métrico M, existem em M duas bolas abertas disjuntas com centros em a e b, respectivamente.*

B(a,r) B(b,r)
a b
$r < \dfrac{d(a,b)}{2}$

Demonstração: Seja r um número real tal que $0 < r \leq \dfrac{d(a, b)}{2}$. Se existisse um ponto $x \in M$ tal que $x \in B(a; r)$ e $x \in B(b; r)$, teríamos $d(x, a) < r$, $d(x, b) < r$ e, por conseguinte: $d(a, b) \leq d(x, a) + d(x, b) < 2r$, ou seja, $r > d(a, b)/2$, uma contradição. Logo, $B(a; r) \cap B(b; r) = \varnothing$.

Observação — É claro que a proposição acima também vale se dissermos "bolas fechadas" em vez de "bolas abertas" pois tôda bola aberta $B(a; r)$ contém, por exemplo, a bola fechada $D(a; r/2)$.

Um subconjunto X de um espaço métrico diz-se *limitado* quando existe um número real $r \geq 0$ tal que $d(x, y) \leq r$ quaisquer que sejam $x, y \in X$. O menor dêsses números r chama-se o *diâmetro* do conjunto X e representa-se pelo símbolo $\delta(X)$. Assim:

Diâmetro de $X = \delta(X) = \sup. \{d(x, y);\ x, y \in X\}$, se X não é vazio e $\delta(\emptyset) = 0$.

EXEMPLOS

10. O diâmetro de um conjunto reduzido a um ponto é zero. Todo conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_m\}$ é limitado e seu diâmetro é o maior dos números $d(x_i, x_j)$, $i, j = 1, \ldots, m$. Em qualquer espaço métrico uma bola fechada $D(a; r)$ é um conjunto limitado e seu diâmetro é $\leq 2r$. Com efeito, se $x, y \in D(a; r)$, então $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) \leq r + r = 2r$. Pode se dar o caso de ser $\delta(D(a; r)) < 2r$. Por exemplo, no intervalo $[0, 1]$, considerado como subespaço da reta, a bola fechada de centro 0 e raio 1 coincide com o espaço todo e portanto seu diâmetro é 1, e não 2. Como, evidentemente, $A \subset B$ (A e B limitados) implica $\delta(A) \leq \delta(B)$, tem-se também $\delta(B(a; r)) \leq 2r$ e $\delta(S(a; r)) \leq 2r$ em qualquer espaço métrico.

11. Um conjunto X é limitado se, e sòmente se, está contido numa bola. Com efeito, se X é limitado, então, fixado $x_0 \in X$ arbitràriamente, temos $d(x, x_0) \leq \delta(X)$ para todo $x \in X$, donde X está contido na bola fechada de centro x_0 e raio $\delta(X)$. (Se $X = \emptyset$, então X está contido em qualquer bola.) Recìprocamente, se X está contido numa bola, então X é limitado porque a bola é.

12. Num espaço vetorial normado $E \neq \{0\}$, o diâmetro de uma bola fechada de raio r é igual a $2r$. Basta verificar êste fato para a bola $D = D(0; r)$ de centro na origem, pois a translação $x \to x + a$ é uma isometria que transforma a bola fechada $D = D(0; r)$ na bola fechada $D(a; r)$. Ora, se x é qualquer vetor $\neq 0$ em E, então $y = rx/|x|$ e $-y$ têm ambos norma r, donde pertencem a D. Mas $|y-(-y)| = |2y| = 2r$. Logo, $\delta(D) = 2r$ (levando em conta o Ex. 10). Note-se que êste argumento provou também que a esfera $S(0; r)$ — e portanto qualquer esfera de raio r em E — tem diâmetro $2r$. Também as bolas abertas de raio r em E têm diâmetro $2r$. Verificação para $B = B(0; r)$: dado qualquer a com $0 < a < 2r$, tomemos r_0 com $\frac{a}{2} < r_0 < r$ e um vetor $x \neq 0$ em E. Então $y = r_0 x/|x|$ e $-y$ têm

norma r_0. Logo, $y, -y \in B$. Mas $|y-(-y)| = 2r_0 > 1$. Assim, $\delta(B) > a$, o que mostra ser $\delta(B) = 2r$.

Observe-se que, apesar dos resultados acima, as bolas e esferas num espaço vetorial normado podem assumir aspectos inesperados. As figuras abaixo mostram as formas do disco de centro 0 e raio 1 no plano R^2 relativamente a 3 normas diferentes.

$x^2+y^2=1$ $\qquad$ $|x|+|y|=1$ $\qquad$ $\text{máx.}\{|x|,|y|\}=1$

$|(x,y)| = \sqrt{x^2+y^2}$ $\qquad$ $|(x,y)|' = |x|+|y|$ $\qquad$ $|(x,y)|'' = \text{máx.}\{|x|,|y|\}$

As "esferas" $S(0;1)$ são respectivamente um círculo, um quadrado de diagonais contidas nos eixos e um quadrado de lados paralelos aos eixos.

13. Num espaço vetorial normado, nenhum subespaço vetorial $\neq \{0\}$ é limitado. Com efeito, se $v \neq 0$, então $tv/|v|$ tem norma $|t|$.

14. Uma aplicação $f: X \to M$ de um conjunto X num espaço métrico M chama-se *limitada* quando $f(X)$ é um subconjunto limitado de M. Em particular, se M possui uma métrica limitada (isto é, $\delta(M) < \infty$), então tôda aplicação $f: X \to M$ é limitada.

Indicaremos com $\mathfrak{B}(X; M)$ o conjunto das aplicações limitadas de X em M. Introduziremos em $\mathfrak{B}(X; M)$ uma métrica, definindo a distância entre duas aplicações limitadas $f, g: X \to M$ como:

$$d(f, g) = \sup. \{d(f(x), g(x)); x \in X\}.$$

Observamos, inicialmente, que $d(f, g) < \infty$. Com efeito, fixemos um ponto arbitrário $x_0 \in X$. Como $f(X)$ e $g(X)$ são subconjuntos limitados de M, existem números reais $A > 0$ e $B > 0$ tais que $d(f(x), f(x_0)) \leq A$ e $d(g(x), g(x_0)) \leq B$ para todo $x \in X$. Seja $d(f(x_0), g(x_0)) = C$. Então, qualquer que seja $x \in X$, temos $d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), g(x_0)) + d(g(x_0), g(x))$ em virtude da desigualdade triangular. Segue-se que

$$d(f(x), g(x)) \leq A + B + C \text{ para todo } x \in X.$$

Em conseqüência, $d(f, g) = \sup. \{d(f(x), g(x)); x \in X\} \leq A + B + C$, o que prova ser $d(f, g)$ um número real bem definido. Os postulados exigidos para uma métrica são fàcilmente verificados. Por exemplo, se $f \neq g$, então existe pelo menos um ponto $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$ e, portanto, $d(f(x_0), g(x_0)) > 0$. Logo, $d(f, g) > 0$.

Se E fôr um espaço vetorial normado, o conjunto $\mathfrak{B}(X; E)$ possui uma estrutura natural de espaço vetorial: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$. (É fácil ver que se f e g são limitadas, então $f + g$ e λf também são.) A métrica acima definida em $\mathfrak{B}(X; E)$ provém da norma

$$|f| = \text{sup.} \{|f(x)|; x \in X\},$$

que faz de $\mathfrak{B}(X; E)$ um espaço vetorial normado. Escreveremos então $|f - g|$ em vez de $d(f, g)$.

Casos particulares importantes são $\mathfrak{B}(X; R)$, o espaço das funções reais limitadas definidas em X e $\mathfrak{B}(I; R)$ espaço das funções reais limitadas definidas num intervalo $I = [a, b]$ da reta. Neste último caso, $d(f, g)$ pode ser visualizada como o sup. das cordas verticais que ligam o gráfico de f ao gráfico de g. (Vide figura à esquerda.)

Dada $f \in \mathfrak{B}(X; M)$, a bola fechada $D(f; r)$ de centro f e raio $r > 0$ consiste de tôdas as aplicações $g : X \to M$ tais que $d(f(x), g(x)) \leq r$ para qualquer $x \in X$. No caso $\mathfrak{B}(X; R)$, de funções reais, essa bola é formada pelas funções $g : X \to R$ tais que $f(x) - r \leq g(x) \leq f(x) + r$, qualquer que seja $x \in X$. Se $X = [a, b]$ é um intervalo da reta, a bola fechada $D(f; r)$ é o conjunto de tôdas as funções cujos gráficos estão contidos na "faixa" de raio r cuja linha central é o gráfico de f. (Vide figura à direita).

15. Como suplemento do exemplo anterior, podemos considerar o conjunto $\mathfrak{F}(X; M)$ de *tôdas* as aplicações de um conjunto arbitrário X no espaço métrico M. Dadas duas aplicações quaisquer $f, g : X \to M$, o conjunto de números reais $\{d(f(x), g(x)); x \in X\}$ é, em geral, ilimitado superiormente, isto é, tem sup. igual a $+\infty$. Assim, a definição anterior, que tornou $\mathfrak{B}(X; M)$ um espaço métrico, não pode ser estendida a $\mathfrak{F}(X; M)$. Mas podemos exprimir $\mathfrak{F}(X; M)$ como uma reunião de espaços métricos disjuntos (um dos quais é $\mathfrak{B}(X; M)$) do seguinte modo:

Dada $f : X \to M$ qualquer, diremos que uma aplicação $g : X \to M$ está *a uma distância finita de* f, e escreveremos $d(f, g) < \infty$, quando

$$\text{sup.} \{d(f(x), g(x)); x \in X\} < +\infty.$$

A relação $d(f, g) < \infty$ é uma equivalência em $\mathfrak{F}(X; M)$. Indicaremos com $\mathfrak{B}_f(X; M)$ a classe de equivalência da aplicação f; $\mathfrak{B}_f(X; M)$ é o conjunto de tôdas as aplicações $g : X \to M$ situadas a uma distância finita de f. Em cada $\mathfrak{B}_f(X; M)$, $d(g, h) = \sup. \{d(g(x), h(x)); x \in X\}$ é uma métrica. O espaço $\mathfrak{B}(X; M)$ das aplicações limitadas de X em M é a classe de equivalência $\mathfrak{B}_c(X; M)$ de qualquer aplicação constante $X \to c \in M$. Quando $M = E =$ = espaço vetorial normado, $\mathfrak{B}(X; E) = \mathfrak{B}_0(X; E)$ é, como vimos, um subespaço do espaço vetorial (sem norma) $\mathfrak{F}(X; E)$ mas, se $f : X \to E$ fôr uma aplicação *ilimitada*, $\mathfrak{B}_f(X; E)$ *não é* um espaço vetorial. De qualquer modo, $\mathfrak{B}_f(X; E) = \mathfrak{B}(X; E) + f$ é a "variedade afim" obtida transladando-se o subespaço $\mathfrak{B}(X; E)$ por meio de f.

16. Como aplicação das considerações acima, mostraremos que todo espaço métrico M pode ser isomètricamente imerso num espaço de funções reais. Com efeito, consideremos a métrica $d : M \times M \to R$. Para cada $x \in M$, temos a aplicação parcial $d_x : M \to R$, definida por $d_x(y) = d(x, y)$. A correspondência $x \to d_x$ define uma aplicação $\varphi : M \to \mathfrak{F}(M, R)$, de M no espaço das funções reais em M : $\varphi(x) = d_x$ = função distância de um ponto variável de M ao ponto x.

Notemos, em primeiro lugar, que para quaisquer $x, x', y \in M$, temos $|d(x, y) - d(x', y)| \leq d(x, x')$ e, portanto, $\sup. \{|d_x(y) - d_x'(y)|; y \in M\} \leq d(x, x') < +\infty$. Isto significa que duas funções d_x, d_x', para quaisquer $x, x' \in M$, estão sempre a uma distância finita uma da outra. Assim, existe $f : M \to R$ tal que $\varphi(M) \subset \mathfrak{B}_f(M; R)$. (Basta pôr $f = d_x$, para algum $x \in M$.)

Provaremos, agora, que $|d_x - d_x'| = d(x, x')$, isto é, que a aplicação $\varphi : M \to \mathfrak{F}(M, R)$ é uma imersão isométrica. Ora, acabamos de ver que $|d_x - d_x'| = \sup. \{|d_x(y) - d_x'(y)|; y \in M\} \leq d(x, x')$. Mas é claro que $|d_x(x') - d_x'(x')| = d(x, x')$; logo $|d_x - d_x'| = d(x, x')$.

17. Se $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ é o conjunto dos números inteiros de 1 até n, então tôda aplicação $f : X \to M$ é limitada e, escrevendo $f(1) = x_1, \ldots, f(n) = x_n$, f identifica-se à n-upla $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de elementos de M. Portanto, neste caso, $\mathfrak{B}(X; M) = M \times \ldots \times M$ (produto cartesiano de n fatôres iguais a M). A métrica acima introduzida em $\mathfrak{B}(X; M)$ permite então considerar o produto cartesiano $M^n = M \times \ldots \times M$ como um espaço métrico, onde a distância entre duas n-uplas $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ é dada por $d(x, y) = \text{máx.} \{d(x_1, y_1), \ldots, d(x_n, y_n)\}$. Como

vemos, isto generaliza uma das métricas que introduzimos anteriormente no espaço $R^n = R \times \ldots \times R$. Mas geralmente, o *produto cartesiano* $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ de n espaços métricos $M_1, \ldots, M_n$ pode ser munido de métrica análoga:

$$d(x, y) = \text{máx. } \{d(x_1, y_1), \ldots, d(x_n, y_n)\},$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $x_1, y_1 \in M_1, \ldots, x_n, y_n \in M_n$. É claro que podemos também considerar no produto cartesiano $M_1 \times \ldots \times M_n$ as distâncias

$$\bar{d}(x, y) = d(x_1, y_1) + \ldots + d(x_n, y_n) \text{ e } \dot{d}(x, y) = \sqrt{d(x_1, y_1)^2 + \ldots + d(x_n, y_n)^2},$$

que generalizam métricas semelhantes no espaço euclidiano R^n mas não possuem correspondente em $\mathfrak{B}(X; M)$, com X e M arbitrários.

Veremos, no Cap. II, que estas 3 métricas no produto cartesiano $M_1 \times \ldots \times M_n$ são *equivalentes* para os propósitos da Topologia: uma aplicação definida nesse espaço (ou nêle tomando valôres) é contínua em relação a uma das três se, e sòmente se, é contínua relativamente a qualquer das outras duas.

§ 4. Pseudométrica

Uma *pseudométrica* num conjunto M é uma função real $d : M \times M \to R$ tal que $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$, $d(x, x) = 0$ e $d(x, z) \leq d(x, y) + d(x, z)$ para quaisquer $x, y, z \in M$. Uma pseudométrica é uma métrica se, e sòmente se, $d(x, y) > 0$ sempre que $x \neq y$.

Um *espaço pseudométrico* é um par (M, d), onde M é um conjunto e d é uma pseudométrica em M.

Seja $f : X \to M$ uma aplicação de um conjunto X num espaço pseudométrico M. Para $x, y \in X$, ponhamos $\rho(x, y) = d(f(x), f(y))$. Isto define uma pseudométrica ρ em X. Quando M fôr um espaço métrico, ρ será uma métrica se, e sòmente se, f fôr biunívoca. Neste caso, f será uma imersão isométrica de (X, ρ) em M. De qualquer maneira, a pseudométrica ρ diz-se *induzida* em X pela aplicação f (ou pela pseudométrica de M, através de f).

Todo espaço pseudométrico M dá origem a um espaço métrico, obtido de M mediante "identificação de pontos situados a distância nula um do outro". Em têrmos precisos, o processo é o seguinte: Dados $x, y \in M$, escrevamos xRy para exprimir que $d(x, y) = 0$. Verifica-se sem dificuldade que xRy é uma relação de equivalência em M. Seja $N = M/R$ o espaço quociente correspondente. Os elementos de N são, portanto, os

subconjuntos $A_x \subset M, x \in M$, onde $A_x = \{y \in M, d(y, x) = 0\}$. Definamos em N uma métrica d' pondo $d'(A_x, A_y) = d(x, y)$. É fácil ver que se xRx' e yRy' então $d(x, y) = d(x', y')$ (use a desigualdade triangular). Logo, d' é bem definida e os axiomas que caracterizam as métricas são verificados sem dificuldade. (Em particular, $d'(A_x, A_y) = 0$ significa xRy e portanto $A_x = A_y$.)

EXEMPLOS

18. Seja M o conjunto das funções reais integráveis definidas no intervalo $[a, b]$. Dadas $f, g \in M$, ponhamos

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Então, d_1 é uma pseudométrica em M, mas não uma métrica. Por exemplo, se f difere de g apenas em um número finito de pontos, então $f - g$ é zero salvo, nesses pontos, e portanto $d_1(f, g) = 0$. De acôrdo com o procedimento geral acima descrito, passamos da pseudométrica d_1 para uma métrica ρ_1 mediante o preço de lidar com classes de equivalência de funções, em vez de funções: f e g são equivalentes quando $\int |f - g| = 0$. Note-se que M é um espaço vetorial e que, pondo-se $|f|_1 = d(f, 0)$ tem-se, para $f, g \in M$: $|f|_1 \geq 0$, $|\lambda f|_1 = |\lambda| |f|_1$, $|f + g|_1 \leq |f|_1 + |g|_1$. Estas propriedades caracterizam uma *seminorma* em um espaço vetorial. Assim, d_1 é uma pseudométrica induzida por uma seminorma: $d_1(f, g) = |f - g|_1$.

19. De um modo geral, os exemplos mais freqüentes de pseudométricas são originados por seminormas. Uma seminorma bastante popular em Análise Funcional é a seguinte: no espaço M, cujos elementos são as funções reais $f : R \to R$ infinitamente deriváveis, fixamos os inteiros $n, k > 0$ e definimos, para cada $f \in M$,

$$|f|_{n,k} = \text{sup.}\ \{|f(x)|\,,\ |f'(x)|, \ldots, |f^{(k)}(x)|;\ -n \leq x \leq n\},$$

onde $f', f'', \ldots, f^{(k)}$ indicam as derivadas sucessivas de f.

§ 5. Exercícios

1. Seja $d : M \times M \to R$ uma função real tal que $d(x, x) = 0$, $d(x, y) \neq 0$ se $x \neq y$ e $d(x, z) \leq d(x, y) + d(z, y)$. Então, d é uma métrica.

2. Se d é uma métrica em M, então $d_1(x, y) = \min. \{1, d(x, y)\}$, $d_2(x, y) = d(x, y)/(1 + d(x, y))$ e $d_3(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$ também são métricas em M.

3. Seja E um espaço vetorial e d uma métrica em E tal que $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ e $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$ para quaisquer $x, y, z \in E$ e λ escalar. Então, existe uma norma $|\ |$ em E tal que $d(x, y) = |x - y|$.

4. Para $x = (x^1, \ldots, x^n)$ e $y = (y^1, \ldots, y^n)$ em R^n, seja

$$d(x, y) = a_1|x^1 - y^1| + a_2|x^2 - y^2| + \ldots + a_n|x^n - y^n|,$$

onde $a_1, \ldots, a_n$ são constantes > 0. Então, d é uma métrica em R^n, proveniente de uma norma.

5. Um *produto interno* num espaço vetorial real E é uma aplicação $E \times E \to R$, indicada com $(x, y) \to <x, y>$, que goza das seguintes propriedades:

i) $<x, y> = <y, x>$.
ii) $<\lambda x, y> = \lambda <x, y> = <x, \lambda y>$.
iii) $<x + y, z> = <x, z> + <y, z>, \quad <x, y + z> = <x, y> + <x, z>$.
iv) $<x, x> \geq 0$, $<x, x> = 0$ sòmente quando $x = 0$.

Para $x = (x^1, \ldots, x^n)$ e $y = (y^1, \ldots, y^n)$ em R^n, seja $<x, y> = \Sigma x^i y^i$. Isto define um produto interno em R^n. Um produto interno num espaço E gera uma norma mediante a definição $|x| = \sqrt{<x, x>}$. (Para verificar que $|x + y| \leq |x| + |y|$, demonstre a desigualdade de Cauchy-Schwarz $|<x, y>| \leq |x| \cdot |y|$ por meio de raciocínio análogo ao usado no texto para estabelecer a desigualdade de Cauchy.) Uma norma proveniente de um produto interno satisfaz à identidade $|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$. Das três normas consideradas no texto para o espaço R^n, apenas uma delas provém de um produto interno.

6. Dar exemplo de 3 subconjuntos A, B, C da reta, tais que $d(A, C) > d(A, B) + d(B, C)$.

7. Qual é o número máximo de pontos que pode ter um subespaço $X \subset R^2$ para que R^2 nêle induza a métrica do Ex. 5? Generalize para R^n.

8. Sejam $a_1, \ldots, a_n \in R^n$ vetores unitários, dois a dois, ortogonais. [Isto é, se $a_i = (a_i^1, \ldots, a_i^n)$, então $<a_i, a_i> = \Sigma_j a_i^j a_i^j = 1$ e, para $i \neq j$, $<a_i, a_j> = \Sigma_k a_i^k a_j^k = 0$.] A aplicação $T : R^n \to R^n$, definida por $T(x^1, \ldots, x^n) = (y^1, \ldots, y^n)$, onde $y^i = \Sigma_j a_j^i x^j$, é uma isometria de R^n sôbre si mesmo. Segue-se que, se $b \in R^n$ é um vetor fixo qualquer, a aplicação $x \to T(x) + b$ também é uma isometria de R^n. Recìprocamente, tôda isometria $f : R^n \to R^n$ é da forma $f(x) = T(x) + b$, onde T é o tipo acima.

9. Para todo inteiro $p > 0$, $|x|_p = [\sum_i |x^i|^p]^{1/p}$ é uma norma em R^m.

Seja D_p o disco de raio 1 e centro na origem do plano R^2 munido da norma $|\ |_p$. Mostre que $D_1 \subset D_2 \subset \ldots$ e que $\bigcup_{p=1}^{\infty} D_p = D$ é o disco unitário relativo à norma máx. $\{|x^1|, |x^2|\}$, a qual pode então ser indicada com $|x|_\infty$.

10. Sejam A e B subconjuntos limitados de um espaço métrico M.

Então, $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B)$. Logo, a reunião de um número finito de conjuntos limitados é limitada.

11. Na métrica definida em $M_1 \times \ldots \times M_n$ por $d(x, y) = \text{máx.}\ \{d(x_1, y_1), \ldots, d(x_n, y_n)\}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, a bola aberta (resp. fechada) de centro x e raio r é o produto cartesiano das bolas abertas (resp. fechadas) de centro x_i e raio r $(i = 1, 3, \ldots, n)$.

12. Sejam X e Y subconjuntos limitados de um espaço métrico M.

Seja $\alpha(X, Y) = \sup. \{d(x, y);\ x \in X, y \in Y\}$. Então $\alpha(X, Y) < +\infty$ e, para qualquer $z \in M$, tem-se $|d(z, X) - d(z, Y)| \leq \alpha(X, Y)$.

13. Seja M um espaço métrico. Indiquemos com $\mathfrak{F}(M)$ o conjunto de tôdas as partes $X \subset M$ que gozam das seguintes propriedades:

i) X é limitado.

ii) Se $d(x, X) = 0$, então $x \in X$.

Para $X, Y \in \mathfrak{F}(M)$, seja $\rho(X, Y)$ o maior dos dois números seguintes:

$$\sup. \{d(x, Y); x \in X\} \text{ ou } \sup. \{d(y, X); y \in Y\}.$$

Então ρ é uma métrica em $\mathfrak{F}(M)$, chamada a *métrica de Hausdorff*. Para $X \subset M$ qualquer e $r > 0$, seja $U(X;r) = \bigcup_{x \in X} B(x, r)$ = reunião de tôdas as bolas abertas de raio r e centro num ponto de X. Então, se $X, Y \in \mathfrak{F}(M)$, mostre que $\rho(X, Y) < r$ implica $X \subset U(Y;r)$ e $Y \subset U(X;r)$. Por sua vez, estas duas inclusões implicam $\rho(X, Y) \leq r$.

14. Seja $\hat{d}$ a aplicação que associa a cada parte $X \subset M$ de um espaço métrico M a função real $d_X : M \to R$, definida por $d_X(z) = d(z, X)$, $z \in M$. (Ou seja, d_X é a função distância de um ponto variável de M ao conjunto fixo X.) Se nos restringirmos a considerar d_X apenas para os $X \in \mathfrak{F}(M)$ (vide Exerc. 13) obteremos uma aplicação $\hat{d} : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M; R)$, de $\mathfrak{F}(M)$ no conjunto $\mathfrak{F}(M; R)$ das funções reais no espaço métrico M. Temos então:

a) Para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{F}(M)$, as funções d_X e d_Y estão a uma distância finita em $\mathfrak{F}(M, R)$. (Usar o Exerc. 12.)

b) A aplicação $\hat{d} : X \to d_X$ é uma imersão isométrica de $\mathfrak{F}(M)$ no espaço de funções $\mathfrak{F}(M; R)$.

15. Seja $S^n = \{x \in R^{n+1}; |x| = 1\}$ a *esfera unitária n-dimensional*, com a métrica $|x - y|$, induzida de R^{n+1}. Para cada $x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in S^n$, tem-se também $-x = (-x^1, \ldots, -x^{n+1}) \in S^n$. Seja P^n o conjunto quociente de S^n pela relação de equivalência que identifica x com $-x$; os elementos de P^n são os pares não-ordenados $p = \{x, -x\}$, $x \in S^n$. Indiquemos com $\pi : S^n \to P^n$ a aplicação quociente: $\pi(x) = \{x, -x\} = \pi(-x)$. Em P^n, ponhamos $d(p, q) = \text{mín.}; \{|x - y|; |x + y|\}$, se $p = \{x, -x\}$ e $q = \{y, -y\}$. Isto torna P^n um espaço métrico, chamado o *espaço projetivo (real) n-dimensional*. Tem-se $d(\pi(x), \pi(y)) \leq |x - y|$. Seja $X \subset S^n$ um subconjunto tal que $\delta(X) \leq \sqrt{2}$, isto é, se $x, y \in X$ então $|x - y| \leq \sqrt{2}$. Então, $\pi|X$ é uma imersão isométrica de X em P^n.

$u, q \in R^n$

16. Seja E um espaço vetorial normado. Então, $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

17. Seja $\Delta \subset M \times M$ a *diagonal*: $\Delta = \{(x, x); x \in M\}$, onde M é um espaço métrico. Considere em $M \times M$ a métrica $d(x, y) = \text{máx.} \{d(x_1, y_1), d(x_2, y_2)\}$. Mostre que $d(x, \Delta) = 0$ se, e sòmente se, $x \in \Delta$.

18. Todo espaço métrico finito é discreto.

Funções Contínuas

Capítulo II

§ 1. Introdução

Na categoria matemática cujos objetos são os espaços métricos, as aplicações admissíveis, ou "morfismos", são as imersões isométricas, enquanto as equivalências, ou "isomorfismos", são as isometrias. Para nós, entretanto, a métrica em si não tem tanta importância como tem o fato de que ela nos permite definir funções contínuas e tratar os espaços métricos como espaços topológicos. Assim sendo, as aplicações aqui estudadas serão as *contínuas* e as equivalências serão os *homeomorfismos.* Neste Capítulo, introduziremos estas duas noções, das quais daremos vários exemplos, e estudaremos a noção "equivalência" entre duas métricas no mesmo espaço, significando que elas originam as mesmas funções contínuas.

§ 2. O Conceito de Função Contínua

Definição — Sejam $f: M \to N$ uma aplicação de um espaço métrico M num espaço métrico N e a um ponto de M. Diz-se que f é *contínua no ponto* a quando, dado arbitràriamente um número $\epsilon > 0$, fôr sempre possível determinar $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implique $d(f(x), f(a)) < \epsilon$.

Diremos, simplesmente, que $f: M \to N$ é *contínua* se f fôr contínua em todos os pontos de M.

No importante caso particular em que f é uma função real de uma variável real (definida, digamos, num intervalo da reta), a continuidade de f no ponto a traduz-se, de acôrdo com a definição acima, em: dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $a - \delta < x < a + \delta$ implica $f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon$.

A definição geral equivale a dizer que, para cada bola aberta $B(f(a); \epsilon)$ existe uma bola aberta $B(a; \delta)$ tal que $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \epsilon)$.

OBSERVAÇÃO — Na definição anterior, bem como em todo o resto do livro, usamos o mesmo símbolo d para representar várias métricas diferentes, salvo quando achamos que isto poderia causar confusão (como por exemplo, se temos duas métricas distintas no mesmo conjunto).

EXEMPLO

1. Seja $f : M \to N$ uma *contração fraca* do espaço métrico M no espaço métrico N: isto significa que $d(f(x), f(y) \leq d(x, y))$ para quaisquer $x, y \in M$. Então, f é contínua. Com efeito, seja $a \in M$ um ponto arbitrário de M. Dado $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = \epsilon$. Então, $d(x, a) < \delta$ implica $d(f(x), f(a)) \leq d(x, a) < \epsilon$ e, portanto, f é contínua no ponto a. Em conseqüência dêste fato, as seguintes aplicações são contínuas:

a) As aplicações *constantes* $f : M \to N$, com $f(x) = c \in N$ para todo $x \in M$.

b) As imersões isométricas. Em particular: as isometrias, as *inclusões* i $X \to M$, onde X é um subespaço de M (e $i(x) = x$ para todo $x \in X$) e as imersões $j_x : N \to x \times N \subset M \times N$, com $j_x(y) = (x, y)$.

c) As funções reais $d_A : M \to R$, definidas por $d_A(x) = d(x, A)$, onde A é um subconjunto do espaço métrico M. (Vide Prop. 1, Cap. I.) Em particular, cada função $d_a : M \to R$, $a \in M$, com $d_a(x) = d(x, a)$.

d) As *projeções* $p_i : M_1 \times \ldots \times M_n \to M_i$ $(1 \leq i \leq n)$ de um produto cartesiano de espaços métricos em um dos seus fatôres. A i-ésima projeção é definida por $p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. (Aqui não faz diferença qual a métrica que se toma no produto cartesiano, entre as consideradas no Cap. I.)

e) A aplicação canônica $\pi : S^n \to P^n$, da esfera unitária n-dimensional sôbre o espaço projetivo P^n. (Vide Exerc. 15, Cap. I.)

f) A métrica $d : M \times M \to R$, de um espaço métrico M, é uma contração fraca do espaço métrico $M \times M$ no espaço métrico R, desde que tome-

mos em $M \times M$ a métrica segundo a qual a distância entre os pontos (x_1, x_2) e (y_1, y_2) é dada por $d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2)$. Com efeito:

$$|d(x_1, x_2) - d(y_1, y_2)| = |d(x_1, x_2) - d(y_1, x_2) + d(y_1, x_2) - d(y_1, y_2)| \leq$$
$$\leq |d(x_1, x_2) - d(y_1, x_2)| + |d(y_1, x_2) - d(y_1, y_2)| \leq d(x_1, y_1) + d(x_2, y_2),$$

onde a primeira desigualdade decorre da desigualdade triangular e a segunda do corolário da Prop. 1, Cap. I.

g) A norma $|\ |: E \times E \to R$ de um espaço normado E, pois

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Proposição 1 — *A composta de duas aplicações contínuas é contínua.*

Demonstração: Sejam M, N, P espaços métricos e $f: M \to N$, $g: N \to P$ aplicações tais que f é contínua no ponto $a \in M$ e g é contínua no ponto $b = f(a) \in N$. Afirmamos que a aplicação composta $g \circ f: M \to P$ é

$b = f(a), y = f(x)$ $\qquad$ $c = g(b) = g \circ f(a)$

contínua no ponto a. Com efeito, seja $\epsilon > 0$ um número escolhido arbitràriamente. Como g é contínua no ponto b, existe $\lambda > 0$ tal que $d(g(y), g(b)) < \epsilon$ sempre que $d(y, b) < \lambda$. Por outro lado, como f é contínua no ponto a, dado $\lambda > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $d(f(x), b) < \lambda$ desde que $d(x, a) < \delta$. Então, a partir de $\epsilon > 0$, nos foi possível obter um $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implica $d(f(x), f(a)) < \lambda$ o que, por sua vez, implica $d(g \circ f(x), g \circ f(a)) < \epsilon$. Logo, $g \circ f$ é contínua no ponto a.

Corolário 1 — *Seja $f: M \to N$ contínua. Para cada subespaço $X \subset M$, a restrição $f|X: X \to N$ é contínua.*

Com efeito, $f|X = f \circ i$ e a inclusão $i: X \to M$ é contínua.

Corolário 2 — *Seja $f: M \times N \to P$ contínua. Para cada $a \in M$ e cada $b \in N$ as aplicações parciais $f_a: N \to P$ e $f_b: M \to P$, definidas por $f_a(y) = f(a, y)$ e $f_b(x) = f(x, b)$, são contínuas.*

Com efeito, temos, por exemplo, $f_a = f \circ j_a$, onde $j_a: N \to a \times \times N \subset M \times N$ é a imersão isométrica definida por $j_a(y) = (a, y)$. Do mesmo modo se argumenta para f_b.

Uma aplicação $f: M \times N \to P$, definida num produto cartesiano, é o que usualmente se chama uma "função $f(x, y)$, de 2 variáveis $x \in M$,

$y \in N$". O Corol. 2 se exprime dizendo que tôda função contínua de duas variáveis é *contínua separadamente* em relação a cada uma delas. (A extensão para n variáveis é óbvia mas a recíproca é falsa. *Cf.* Exerc. 4.)

A continuidade de uma função de duas variáveis $f : M \times N \to P$ no ponto $(a, b) \in M \times N$ significa que se pode tornar $f(x, y)$ tão próximo de $f(a, b)$ quanto se queira, desde que se tome x suficientemente próximo de a e y suficientemente próximo de b: dado $\epsilon > 0$ qualquer, deve ser possível achar $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $d(f(x, y), f(a, b)) < \epsilon$ desde que $d(x, a) < \delta_1$ e $d(y, b) < \delta_2$. Para constatar esta afirmação basta, por exemplo, tomar em $M \times N$ a métrica $d((x, y), (a, b)) = \text{máx. } \{d(x, a), d(y, b)\}$. Então, para $\delta = \text{máx. } \{\delta_1, \delta_2\}$, vê-se que $d(x, a) < \delta_1$ e $d(y, b) < \delta_2$ implicam $d((x, y), (a, b)) < \delta$.

Proposição 2 — *Seja E um espaço vetorial (real) normado. As aplicações $\alpha : E \times E \to E$ e $m : R \times E \to E$, dadas por $\alpha(x, y) = x + y$ e $m(\lambda, x) = \lambda \cdot x$, são contínuas. Também é contínua a função real $: R - \{0\} \to R$, definida por $f(t) = 1/t$.*

Demonstração: Como $|(x + y) - (a + b)| \leq |x - a| + |y - b|$, a adição $\alpha(x, y) \to x + y$ é, na realidade, uma contração fraca de $E \times E$ em E e, portanto, é contínua. Para verificar a continuidade da multiplicação por escalares $m : (\lambda, x) \to \lambda x$, sejam $\lambda_0 \in R$ e $x_0 \in E$ fixados arbitràriamente. Dado $\epsilon > 0$, escolhamos $\delta_1 = \epsilon/3(|x_0| + 1)$ e $\delta_2 = \epsilon/3(|\lambda_0| + 1)$. Então, como $\lambda x - \lambda_0 x_0 = (\lambda - \lambda_0)(x - x_0) + \lambda_0(x - x_0) + (\lambda - \lambda_0)x_0$, temos $|m(\lambda, x) - m(\lambda_0, x_0)| \leq |\lambda - \lambda_0| \, |x - x_0| + |\lambda_0| \, |x - x_0| + |\lambda - \lambda_0| \, |x_0|$. Logo, se $|\lambda - \lambda_0| < \delta_1$ e $|x - x_0| < \delta_2$, virão:

$$|\lambda - \lambda_0| \, |x_0| < \delta_1 |x_0| = \epsilon |x_0|/3(|x_0| + 1) < \epsilon/3,$$

$$|\lambda_0| \, |x - x_0| < \delta_2 |\lambda_0| = \epsilon |\lambda_0|/3(|\lambda_0| + 1) < \epsilon/3,$$

$$|\lambda - \lambda_0| \, |x - x_0| < \delta_1 \delta_2 = \epsilon^2/9(|x_0| + 1)(|\lambda_0| + 1) < \epsilon^2/9 < \epsilon^2/3.$$

Não haverá perda de generalidade em supor $\epsilon < 1$, e portanto $\epsilon^2 < \epsilon$. Logo, $|\lambda - \lambda_0| \, |x - x_0| < \epsilon/3$, o que dá $|m(\lambda, x) - m(\lambda_0, x_0)| < \epsilon$, provando a continuidade de m.

Finalmente, seja $t_0 \neq 0$ um número real. A fim de demonstrar a continuidade de $f : t \to 1/t$ no ponto t_0, seja $\epsilon > 0$ dado. Escolhamos $\delta > 0$ como o menor dos números $|t_0|/2$ e $\epsilon \, |t_0|^2/2$. Por ser $\delta \leq |t_0|/2$, os intervalos abertos $(-t_0/2, t_0/2)$ e $(t_0 - \delta_1, t_0 + \delta)$ são disjuntos e, portanto, $|t - t_0| < \delta$ implica $|t| > |t_0|/2$. Assim, sempre que fôr $|t - t_0| < \delta$, será também $|f(t) - f(t_0)| = |1/t - 1/t_0| = |t - t_0|/|t| \, |t_0| < 2\delta/|t_0|^2 \leq$ $\leq 2 \, \epsilon \, |t_0|^2/2 |t_0|^2$, ou seja, $|f(t) - f(t_0)| < \epsilon$. Isto conclui a demonstração.

Corolário 1 — *As funções reais de duas variáveis reais* $s : R \times R \to R$, $p : R \times R \to R$, $q : R \times (R - \{0\}) \to R$ *e* $f : R \times R \to R$, *definidas por* $s(x, y) = x + y$, $p(x, y) = xy$, $q(x, y) = x/y$ *e* $f(x, y) = x - y$ *são contínuas.*

Com efeito, R é um espaço normado real, de modo que a soma $x + y$ e o produto xy são funções contínuas. Quanto à função quociente $(x, y) \to x/y$, ela é composta da aplicação contínua $(x, y) \to (x, 1/y)$ (*cf.* Prop. 3, abaixo) com a função contínua $(x, z) \to xz$. Finalmente, a diferença $(x, y) \to x - y$ é a composta da isometria $(x, y) \to (x, -y)$ de R^2, com a função contínua $(x, z) \to x + z$.

Corolário 2 — *Sejam* $f, g : M \to R$ *funções reais contínuas no espaço métrico* M. *A soma* $f + g$, *a diferença* $f - g$ *e o produto* $f \cdot g$ *são funções reais contínuas em* M. *Além disso, se* $X \subset M$ *fôr o conjunto dos pontos* $x \in M$ *tais que* $g(x) \neq 0$, *o quociente* $f/g : X \to R$ *é uma função contínua.*

Com efeito, a aplicação $\varphi : x \to (f(x), g(x))$, de M em R^2, é contínua (*cf.* Prop. 3, abaixo). Ora, $f + g$, $f - g$ e $f \cdot g$ são as compostas desta aplicação φ com as funções soma, produto e diferença, respectivamente, enquanto que f/g é a composta da função quociente com a restrição de φ ao conjunto X. [Note-se que $\varphi(X) \subset R \times (R - \{0\})$.]

Observação — A Prop. 2 (com demonstração inteiramente análoga) e seus corolários valem também para espaços vetoriais, números e funções complexos, em vez de reais.

Uma aplicação $f : X \to M_1 \times \ldots \times M_n$ de um conjunto X no produto cartesiano dos conjuntos $M_1, \ldots, M_n$ equivale a n aplicações $f_1 : X \to M_1, \ldots, f_n : X \to M_n$ tais que $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, $x \in X$. As aplicações $f_i : X \to M_i$ chamam-se as *coordenadas da aplicação* f.

Proposição 3 — *Sejam* $M, M_1, \ldots, M_n$ *espaços métricos. Uma aplicação* $f : M \to M_1 \times \ldots \times M_n$ *é contínua no ponto* $a \in M$ *se, e sòmente se, cada uma das suas coordenadas* $f_i : M \to M_i$ *é contínua no ponto* a.

Demonstração: Sendo $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, tem-se $f_i = p_i \circ f$ onde, para cada $i = 1, \ldots, n$, $p_i : M_1 \times \ldots \times M_n \to M_i$ é a projeção sôbre o i-ésimo fator. Segue-se que, se f é contínua, cada coordenada f_i também o é. Recìprocamente, sejam $f_1, \ldots, f_n$ contínuas no ponto a. Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, existem então números $\delta_1 > 0, \ldots, \delta_n > 0$ tais que $d(x, a) < \delta_i$ implica $d(f_i(x), f_i(a)) < \epsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Seja $\delta = \text{mín.} \{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$. Então, $\delta > 0$ e $d(x, a) < \delta$ implica que sejam simultâneamente $d(f_1(x), f_1(a)) < \epsilon, \ldots, d(f_n(x), f_n(a)) < \epsilon$ e, portanto, $d(f(x), f(a)) = \text{máx.} \{d(f_i(x), f_i(a)); i = 1, \ldots, n\} < \epsilon$, o que prova a continuidade de f no ponto a.

Corolário — *Sejam* $f : M \to P$, $g : N \to Q$ *aplicações contínuas. Então, a aplicação* $\varphi : M \times N \to P \times Q$, *definida por* $\varphi(x, y) = (f(x), g(y))$ *é contínua.*

Com efeito, as coordenadas de φ são as aplicações $(x, y) \to f(x)$ e $(x, y) \to g(y)$. A primeira destas é a composta $f \circ p_1$ e a segunda é igual a $g \circ p_2$, onde $p_1 \in M \times N \to M$, $p_2 : M \times N \to N$ são as projeções. Logo, as coordenadas de φ são contínuas e então φ é contínua, pela Prop. 3.

Indicaremos com $\mathfrak{C}(M; N)$ o conjunto de tôdas as *aplicações contínuas* do espaço métrico M no espaço métrico N e com $\mathfrak{C}_0(M; N)$ o conjunto das *aplicações contínuas limitadas* de M e N. Salvo menção explícita em contrário, $\mathfrak{C}_0(M; N)$ será sempre considerado como subespaço do espaço $\mathfrak{B}(M; N)$ de tôdas as aplicações limitadas de M em N. Assim, a menos que o neguemos explìcitamente, em $\mathfrak{C}_0(M; N)$ será tomada a métrica

$$d(f, g) = \sup. \{d(f(x), g(x)); x \in M\}.$$

$\mathfrak{C}(M; N)$, por outro lado, não é um espaço métrico mas é uma reunião disjunta de espaços métricos $\mathfrak{C}_f(M; N)$. Para cada aplicação contínua $f : M \to N$, $\mathfrak{C}_f(M; N)$ é o conjunto das aplicações contínuas $g : M \to N$ que estão a uma distância finita de f.

Um corolário da Prop. 2 é que, quando E fôr um espaço vetorial normado, $\mathfrak{C}(M; E)$ será um subespaço vetorial de $\mathfrak{F}(M; E)$ e $\mathfrak{C}_0(M; E)$ um subespaço do espaço vetorial normado $\mathfrak{B}(M; E)$.

EXEMPLO

2. Seja $I = [a, b]$ um intervalo fechado da reta. Aprende-se em Cálculo que tôda função contínua $f : I \to R$ é integrável e, portanto, $\mathfrak{C}(I; R)$ é um subconjunto do espaço M das funções reais integráveis em $[a, b]$. A seminorma

$$|f - g|_1 = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx,$$

introduzida em M no Ex. 15, Cap. I, induz uma *norma* em $\mathfrak{C}(I; R)$. Em outras palavras, se $f : [a, b] \to R$ é contínua e $f \neq 0$, então $|f|_1 = \int_a^b |f(x)| dx > 0$. Com efeito, seja $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Não há perda de generalidade em supor $f \geq 0$ pois, se $g(x) = |f(x)|$, $|g|_1 = |f|_1$. Assim, $f(x_0) > 0$. Tomemos $\epsilon = (1/2) f(x_0)$. Como f é contínua, existe $\delta > 0$ tal que $x \in [a, b]$ e $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ implicam $\frac{1}{2} f(x_0) < f(x) < \frac{3}{2} f(x_0)$. Para fixar as idéias, seja $x_0 \neq b$. Então, tomando $\delta < (b - a)$, teremos

$[x_0, x_0 + \delta] \subset [a, b]$ e então, para todo x no intervalo $[x_0, x_0 + \delta]$, $f(x) > \frac{1}{2} f(x_0)$. Seja φ a função (integrável) igual a $\frac{1}{2} f(x_0)$ no intervalo $[x_0, x_0 + \delta]$ e igual a 0 nos demais pontos de $[a, b]$. Temos $f \geq \varphi$ e, portanto, $|f|_1 = \int_a^b f(x)\, dx \geq \int_a^b \varphi(x) dx = \frac{1}{2} f(x_0)\, (b - a) > 0$.

§ 3. Homeomorfismos

Uma aplicação biunívoca $f : M \to N$, de um espaço métrico M sôbre um espaço métrico N, pode ser contínua sem que a sua inversa $g = f^{-1} : N \to M$ também o seja. Isto será mostrado nos exemplos abaixo.

EXEMPLOS

3. Indiquemos com M o espaço R^n munido da métrica d', onde $d'(x, y) = 1$ para $x \neq y$ e $d'(x, x) = 0$. Seja N o mesmo espaço euclidiano, com sua métrica habitual d. A aplicação $f : M \to N$, definida por $f(x) = x$, é contínua mas sua inversa $g = f^{-1} : N \to M$ [que também se escreve $g(x) = x$] não é contínua em ponto algum de N. Com efeito, seja qual fôr $x \in R^n$, dado ϵ, com $0 < \epsilon \leq 1$, a bola aberta de centro x e raio ϵ em M reduz-se ao ponto x e, portanto, não pode conter uma bola aberta $B = g(B)$ de centro x, do espaço euclidiano N. Na mesma linha dêste exemplo, porém menos artificial, é o seguinte:

4. Sejam $M = (-1, 0] \cup [1, +\infty)$ e $N = [0, +\infty)$ subespaços da reta e definamos $f : M \to N$ por $f(x) = x^2$. Vê-se que f é uma aplicação biunívoca e contínua de M sôbre N. A inversa de f é a função $g = f^{-1} : N \to M$, definida por $g(y) = \sqrt{y}$, se $y \geq 1$ e $g(y) = -\sqrt{y}$ se $0 \leq y < 1$. A aplicação g não é contínua no ponto $1 \in N$. Com efeito, se $0 < \epsilon < 1$, qualquer intervalo de centro 1 e raio δ em N contém pontos $y < 1$, os quais são transformados por g em pontos $g(y) = -\sqrt{y}$, que estão a uma distância ≥ 1 (logo, $> \epsilon$) do ponto $g(1)$.

5. Seja $S^1 = \{(x, y) \in R^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$ o círculo unitário do plano. Definamos uma aplicação $f : [0,2\pi) \to S^1$ pondo $f(t) = e^{it} = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t < 2\pi$. Evidentemente, f é contínua e biunívoca de $[0,2\pi)$ sôbre S^1. Intuitivamente, f consiste em enrolar o intervalo $[0,2\pi)$, sôbre o círculo S^1. Por outro lado, a aplicação inversa $g = f^{-1} : S^1 \to [0,2\pi)$ não é contínua no ponto $a = (1, 0) = f(0)$. Com efeito, dada qualquer bola B de centro em a em S^1 (isto é, um arco de

círculo cujo centro é a) $g(B)$ contém sempre um intervalo da forma $(b, 2\pi)$, logo não é possível tomar B de tal modo que $g(B)$ esteja contida numa bola predeterminada de centro $0 = g(a)$ em $[0, 2\pi)$.

6. Outras aplicações biunívocas e contínuas da reta R sôbre subconjuntos do plano, cujas inversas não são contínuas, são indicadas pelas figuras abaixo. (Justificações a cargo da imaginação do leitor.)

Em face dos exemplos acima, poremos a seguinte definição:

Um *homeomorfismo* é uma aplicação contínua e biunívoca $f: M \to N$ de um espaço métrico M sôbre um espaço métrico N, tal que sua inversa $f^{-1}: N \to M$ também é contínua. Neste caso, f^{-1} ainda é um homeomorfismo.

Evidentemente, se $f: M \to N$ e $g: N \to P$ são homeomorfismos, então $g \circ f: M \to P$ também o é. Se existe um homeomorfismo de M sôbre N, os espaços M e N dizem-se *homeomorfos*.

O problema principal da Topologia é o de classificar espaços segundo a relação de homeomorfismo, isto é, dados dois espaços X e Y dizer se êles são homeomorfos ou não.

EXEMPLOS

7. Uma isometria $f: M \to N$ é um caso particular de homeomorfismo, pois f^{-1} também é uma isometria. Em particular, são homeomorfismos as translações $x \to x + a$ de um espaço normado. Ainda num espaço normado, cada *homotetia* $m_\lambda : x \to \lambda \cdot x$ de razão $\lambda \neq 0$ é um homeomorfismo (uma isometria apenas quando $|\lambda| = 1$), pois seu inverso é a homotetia $y \to (1/\lambda)y$, de razão $1/\lambda$. No espaço euclidiano R^n tôda aplicação linear $A: R^n \to R^n$, definida por $A(x^1, \ldots, x^n) = (y^1, \ldots, y^n)$, $y^i = \Sigma_j\, a_j^i\, x^j$, é contínua, em virtude da Prop. 3. Se o determinante da matriz (a_j^i) é diferente de zero, então A é um homeomorfismo. Com efeito, sabe-se (pela Regra de Cramer, por exemplo) que se $\det.(a_j^i) \neq 0$, então A é biunívoca e sôbre R^n. Sua inversa A^{-1} é necessàriamente linear e, portanto, contínua.

8. Tôda bola aberta $B = B(a; r)$ do espaço euclidiano R^n é homeomorfa ao espaço R^n inteiro. Em primeiro lugar, observemos que a translação $x \to x - a$ estabelece um homeomorfismo de $B(a; r)$ sôbre $B(0; r)$ e a homotetia $x \to (1/r)x$ fornece um homeomorfismo de $B(0; r)$ sôbre $B(0; 1)$. Basta, portanto, considerar B = bola aberta de centro na origem e raio 1. Seja agora a aplicação $f: R^n \to B$, definida por $f(x) = x/(1 + |x|)$. Evidentemente f é contínua, como é também contínua a aplicação $g: B \to R^n$, dada por $g(y) = y/(1 - |y|)$. Um cálculo imediato mostra que $gf(x) = x$ para todo $x \in R^n$ e $fg(y) = y$ para todo $y \in B$. Logo $g = f^{-1}$ e, portanto, f é um homeomorfismo. O leitor observará que o mesmo argumento mostra que qualquer bola aberta de um espaço normado E é homeomorfa a todo o espaço.

9. Seja $f: M \to N$ uma aplicação contínua do espaço métrico M no espaço métrico N. O *gráfico* de f é o conjunto $G(f)$ de todos os pontos $(x, f(x)) \in M \times N$, quando x percorre M. Com a topologia induzida por $M \times N$, o espaço $G(f)$ é homeomorfo a M. De fato, a aplicação $\bar{f}: M \to G(f)$, definida por $\bar{f}(x) = (x, f(x))$ é contínua em virtude do Corolário da Prop. 3. Também é contínua a restrição $g = p_1 | G(f): G(f) \to M$ da projeção $p_1: M \times N \to M$ ao gráfico $G(f)$. Além disso, tem-se $g \circ \bar{f}$ = identidade: $M \to M$ e $\bar{f} \circ g$ = identidade: $G(f) \to G(f)$. Logo, $\bar{f}$ e g são homeomorfismos, inversos um do outro.

Como conseqüência do Ex. 9, a bola unitária fechada D^n, com centro na origem do espaço R^n é homeomorfa ao hemisfério fechado $H_+^n = \{x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in S^n; x^{n+1} \geq 0\}$. Com efeito, H_+^n é o gráfico da função contínua real $f: D^n \to R$, definida por $f(x) = \sqrt{1 - |x|^2}$. Mais precisamente, a projeção $p: R^{n+1} \to R^n$, $p(x^1, \ldots, x^{n+1}) = (x^1, \ldots, x^n)$ aplica H_+^n homeomorfamente sôbre D^n. É claro que o mesmo se passa com o hemisfério sul H_-^n.

10. Seja $p = (0, \ldots, 0, 1)$ o *pólo norte* da esfera unitária n-dimensional $S^n = \{x \in R^{n+1}; |x| = 1\}$. A esfera menos o pólo norte constitui um espaço homeomorfo ao espaço euclidiano R^n. Êste homeomorfismo é costumeiramente obtido através da projeção estereográfica

$$\pi: S^n - \{p\} \to R^n, \quad \pi(x) = \frac{x'}{1 - x^{n+1}},$$

onde $x = (x^1, \ldots, x^n, x^{n+1}) \in S^n - p$ e $x' = (x^1, \ldots, x^n)$. Note-se que, para $x \in S^n - p$, $0 \leq x^{n+1} < 1$, de modo que π é uma aplicação *contí-*

nua. Geomètricamente, $\pi(x)$ é o ponto de interseção da semi-reta $\overrightarrow{px}$ com o hiperplano $x^{n+1} = 0$, que identificamos com R^n. Para verificar que π é um homeomorfismo de $S^n - p$ sôbre R^n, basta considerar a aplicação $\varphi : R^n \to S^n - p$, definida por $\varphi(y) = x$, onde, na notação acima:

$$x' = \frac{2y}{|y|^2+1}, \qquad x^{n+1} = \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1}.$$

Constata-se fàcilmente que $\varphi(\pi(x)) = x$ e $\pi(\varphi(y)) = y$ para todo $x \in S^n - p$ e todo $y \in R^n$. Logo, π é um homeomorfismo e φ é o seu inverso.

Observação — Dados dois subespaços $A \subset M$ e $B \subset N$, dizer que A e B são homeomorfos significa admitir a existência de um homeomorfismo $h : A \to B$. Isto não implica na existência de um homeomorfismo $H : M \to N$ tal que $H|A = h$, nem mesmo quando $M = N$. Por exemplo, sejam A a reunião de duas circunferências tangentes externamente e B a reunião de duas circunferências tangentes internamente. É fácil estabelecer um

A B

homeomorfismo entre A e B, mas não existe homeomorfismo algum do plano sôbre si mesmo que aplique A sôbre B. Vamos demonstrar esta afirmação usando um resultado que provaremos no Cap. VII: todo homeomorfismo $H : R^2 \to R^2$ do plano sôbre si mesmo transforma conjuntos limitados em conjuntos limitados.

Admitamos que existisse um homeomorfismo $H : R^2 \to R^2$ tal que $H(A) = B$. O disco plano D, formado pelos pontos da circunferência maior de B e mais os pontos interiores a ela, é um conjunto limitado. Então, sua imagem $H^{-1}(D)$ é limitada. Seja $y = H(x)$ um ponto da circunferência menor de B, que não seja o ponto de tangência. Então $x \in A$ e pode ser ligado a um ponto x' situado fora de $H^{-1}(D)$, por um segmento de reta l,

tal que $l \cap A = x$. Segue-se que $y = H(x) = H(l \cap A) = H(l) \cap H(A) = H(l) \cap B$. Ora, $H(l)$ é uma curva contínua, ligando o ponto y ao ponto $y' = H(x')$. Como $x' \notin H^{-1}(D)$, y' está fora de D. Mas é intuitivamente

$H^{-1}(D)$ l x' x A y' y B

claro que y não pode ser ligado a um ponto y' fora de D por uma curva contínua $H(l)$ que tem apenas o seu ponto inicial y em comum com B. Logo, H não existe.

No raciocínio acima, além do fato de ser $H^{-1}(D)$ limitado (necessário para garantir a ligação de x a x'), usamos também o fato de que não existe uma curva contínua ligando um ponto y no interior de D a um ponto y' no seu exterior, sem cortar o círculo maior. Êstes são resultados simples, que serão estabelecidos nos capítulos seguintes e que ilustram aqui a impossibilidade que temos, no momento, de demonstrar a não-existência de certos homeomorfismos, antes de desenvolvermos a teoria um pouco mais. (Vide Ex. 37, Cap. III.)

§ 4. Métricas Equivalentes

Sejam d e d' métricas no mesmo conjunto M. Diremos que d é *mais fina do que* d' (e às vêzes escreveremos $d > d'$) quando a aplicação identidade $(M, d) \to (M, d')$ fôr contínua.

Por exemplo, se a métrica d torna M um espaço discreto, então d é mais fina do que qualquer outra métrica em M.

Proposição 4 — *A métrica d é mais fina do que a métrica d' no conjunto M se, e sòmente se, para cada $a \in M$, qualquer bola aberta de centro a segundo d' contém alguma bola aberta de centro a segundo d.*

Demonstração: Dizer que a aplicação $f: (M, d) \to (M, d')$, definida por $f(x) = x$, é contínua no ponto $a \in M$ significa afirmar que, para cada $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implica $d'(x, a) < \epsilon$, ou seja, $B(a; \delta) \subset B'(a; \epsilon)$. ($B'$ = bola segundo d'.)

Duas métricas d, d' no mesmo conjunto M dizem-se *equivalentes* ($d \sim d'$) quando d é mais fina do que d' e, ao mesmo tempo, d' é mais fina do que d. Em outras palavras, d e d' são equivalentes quando a aplicação identidade $(M, d) \to (M, d')$ fôr um homeomorfismo. A Prop. 4 admite então os seguintes corolários:

Corolário 1 — *As métricas d e d' são equivalentes se, e sòmente se, tôda bola aberta segundo uma qualquer dessas métricas contém uma bola aberta de mesmo centro segundo a outra métrica.*

Corolário 2 — *Se existirem números reais m, $n > 0$ tais que $d(x, y) \leq \leq nd'(x, y)$ e $d'(x, y) \leq md(x, y)$ quaisquer que sejam os pontos x, $y \in M$, então as métricas d e d' serão equivalentes.*

Com efeito, indicando com B e B' as bolas segundo d e d' respectivamente, teremos então $B'(a; r/n) \subset B(a; r)$ e $B(a; r/m) \subset B'(a; r)$.

EXEMPLOS

11. As métricas $d(x, y) = \sqrt{(x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2}$, $d'(x, y) = = |x^1 - y^1| + |x^2 - y^2|$ e $d''(x, y) = \text{máx.}\{|x^1 - y^1|, |x^2 - y^2|\}$ no plano R^2 são equivalentes. Com efeito, isto decorre da figura ao lado e do Corol. 1 acima (*Cf.* Ex. 12, Cap. I.) Mais geralmente, existem métricas análogas d, d', d'', definidas num produto cartesiano qualquer $M_1 \times \ldots \times M_n$. (*Cf.* Ex. 17, Cap. I.) Observa-se que $d'' \leq d \leq d' \leq n \cdot d''$ e, portanto, as métricas d, d' e d'' são equivalentes, em virtude do Cor. 2.

12. No conjunto $\mathfrak{C}_0(I; R)$ das funções reais contínuas (e limitadas) definidas no intervalo $I = [a, b]$, podemos considerar as duas métricas: $|f - g| = = \sup.\{|f(x) - g(x)|; x \in I\}$ e $|f - g|_1 = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$. [Será demonstrado no Cap. VII que tôda função real contínua em I é limitada, e portanto $\mathfrak{C}_0(I; R) = \mathfrak{C}(I; R)$.] A métrica $|f - g|$ é mais fina do que a métrica $|f - g|_1$. Com efeito, dados $f_0 \in \mathfrak{C}_0(I; R)$ e $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \epsilon/(b - a)$. Se $|f - g_0| < \delta$, então $|f - f_0|_1 = \int_a^b |f(x) - f_0(x)| dx \leq (b - a) \cdot |f - f_0|$. Logo, a bola de centro f_0 e raio ϵ relativamente a $| \, |_1$ contém a bola de centro f_0 e raio $\epsilon/(b - a)$ relativa a $| \, |$. Por outro lado, a métrica $|f - g|_1$ não é mais fina do que a métrica $|f - g|$. Na realidade, nenhuma bola segundo a métrica $|f - g|_1$ pode estar contida numa bola segundo $|f - g|$, pois as primeiras são sempre ilimitadas em relação às últimas. Como se trata

de espaços normados, basta tomar bolas com centro na função idênticamente nula $0 \in \mathfrak{C}_0(I; R)$. Para cada inteiro $n = 1, 2, 3, \ldots$, a função φ_n, cujo gráfico está descrito na figura abaixo, pertence à bola $B_1(0; r) = \{f \in \mathfrak{C}_0(I; R); |f|_1 < r\}$ mas $|\varphi_n| = n$.

$|\varphi_n|_1$ = área da região hachurada $= r/2$

13. A recíproca do Corol. 2 é, em geral, falsa, como se observa tomando a métrica $d'(x, y) = |x^3 - y^3|$ na reta. Como a aplicação $x \to x^3$ é um homeomorfismo de R sôbre si mesmo (cujo homeomorfismo inverso é $y \to \sqrt[3]{y}$), segue-se da Prop. 5, abaixo, que d' é equivalente à métrica usual da reta. Mas, se existisse um número real $n > 0$ tal que $|x - y| \leq n|x^3 - y^3| = n|x - y|\ |x^2 + xy + y^2|$ para quaisquer $x, y \in R$, teríamos, para $x \neq y$ arbitrários: $1 \leq n|\ x^2 + xy + y^2|$, que é uma desigualdade impossível (basta tomar $x = 0$ e $y = 1/\sqrt{2n}$).

PROPOSIÇÃO 5 — *Sejam (M, d), (N, d_1) espaços métricos e $f : M \to N$ uma aplicação biunívoca. Seja d' a métrica induzida por f em M; $d'(x, y) = d_1(f(x), f(y))$, $x, y \in M$. Então, d é mais fina do que d' se, e sòmente se, f é contínua. Segue-se que d e d' são equivalentes se, e sòmente se, f é um homeomorfismo de M sôbre $f(M)$.*

Demonstração: Seja $i : (M, d) \to (M, d')$ a aplicação de inclusão e indiquemos com $f' : (M, d') \to N$ a própria aplicação f quando seu domínio é considerado com a métrica d'. Temos $f = f' \circ i$ (vide diagrama). Ora, f' é uma imersão isométrica e, portanto, contínua. Logo, se d fôr mais fina do que d', isto é, se i fôr contínua, f também o será. Para demonstrar a recíproca, observamos inicial-

mente que os pontos de $N - f(M)$ não desempenham papel algum no enunciado da proposição. Logo, não há perda de generalidade alguma em supor que $N = f(M)$. Então f' é uma isometria e, portanto, um homeomorfismo de (M, d') sôbre N. Assim, se f fôr contínua, $i = (f')^{-1} \circ f : (M, d) \to (M, d')$ também será contínua e, portanto, d será mais fina do que d'. A demonstração da segunda parte é inteiramente análoga, substituindo-se apenas "aplicação contínua" por "homeomorfismo" e "mais fina" por "equivalente".

Corolário — *Sejam* (M, d) *e* (N, d_1) *espaços métricos e* $f : M \to N$ *uma aplicação contínua. A métrica definida em* M *por* $\rho(x, y) = d(x, y) + d_1(f(x), f(y))$ *é equivalente a* d.

Com efeito, a aplicação $f : M \to M \times N$, definida por $F(x) = (x, f(x))$, é um homeomorfismo de M sôbre o gráfico $G(f) = \{(x, f(x)); x \in M\} \subset M \times N$ de aplicação f. Tomando em $M \times N$ [e, portanto, em $G(f)$] a métrica $\delta((x, u), (y, v)) = d(x, y) + d_1(u, v)$, a métrica induzida em M pelo homeomorfismo $F : M \to G(f)$ é $\rho(x, y) = d(x, y) + d_1(f(x), f(y))$. O corolário segue-se.

Em particular, se $f : M \to R$ é uma função real contínua, a métrica $\rho(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$ é equivalente à métrica original d em M.

Duas métricas equivalentes no mesmo espaço M determinam as mesmas aplicações contínuas definidas em M e as mesmas aplicações contínuas com valôres em M. Assim, para efeito de considerações topológicas, não há necessidade de distinguir em M uma métrica de outra equivalente.

EXEMPLOS

14. Dado um espaço métrico arbitrário (M, d), a métrica $d'(x, y) = \inf. \{1, d(x, y)\}$ é equivalente a d. Com efeito, se $d(x, y) \leq 1$ então $d'(x, y) = d(x, y)$, logo as bolas abertas de raio ≤ 1 segundo d e segundo d' coincidem. Isto é suficiente para que a aplicação identidade $i : (M, d) \to (M, d')$ seja um homeomorfismo. Segue-se que tôda métrica num espaço é equivalente a uma métrica limitada, pois $d'(x, y) \leq 1$.

15. Também $d''(x, y)/(1 + d(x, y))$ define em M uma métrica equivalente à métrica d. Com efeito, temos $d''(x, y) \leq d(x, y)$, logo a aplicação identidade $i : (M, d) \to (M, d'')$ é contínua. Por outro lado, para qualquer $\epsilon > 0, d''(x, y) < \epsilon/(1 + \epsilon)$ implica $d(x, y) < \epsilon$, logo $j : (M, d'') \to (M, d)$

também é contínua. A métrica d'' fornece outra prova de que todo espaço métrico é homeomorfo a um espaço métrico limitado, pois $d''(x, y) < 1$ sejam quais forem $x, y \in M$.

§ 5. Aplicações Lineares Contínuas

Sejam E, F espaços vetoriais. Uma aplicação $f: E \to F$ diz-se *linear* quando $f(x + y) = f(x) + f(y)$ e $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ quaisquer que sejam $x, y \in E$, λ escalar. Se $f: E \to F$ é linear, então $f(0) = 0$.

PROPOSIÇÃO 6 — *Sejam E, F espaços vetoriais normados e f: $E \to F$ uma aplicação linear. As seguintes condições são equivalentes:*

1) *f é contínua;*

2) *f é contínua no ponto $0 \in E$;*

3) *existe um número $m > 0$ tal que $|f(x)| \leq m\, |x|$ para todo $x \in E$.*

Demonstração: É claro que 1) $\Rightarrow$ 2). Para provar que 2) $\Rightarrow$ 3), suponhamos que f seja contínua no ponto 0. Indiquemos com $B(r)$ [resp. $B'(r)$] a bola de centro 0 e raio r em E (resp. em F). Como $f(0) = 0$, existe um $m > 0$ tal que $f(B(1/m)) \subset B'(1)$. Como $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, segue-se que $f(B(r)) \subset B'(mr)$ qualquer que seja $r > 0$. Isto significa que $|x| < r$ implica $|f(x)| < m \cdot r$. Ora, nestas condições $|f(x)| \leq m \cdot |x|$ pois, se existisse $x \in E$ com $|f(x)| > m \cdot |x|$, tomaríamos um número s com $|f(x)| > s > m \cdot |x|$ e, escrevendo $s = m \cdot r$, teríamos $|f(x)| > m \cdot r > > m \cdot |x|$ e daí a contradição: $|x| < r$ com $|f(x)| > m \cdot r$. A implicação final 3) $\Rightarrow$ 1) resulta do seguinte: $|f(x) - f(x_0)| = |f(x - x_0)| \leq \leq m|x - x_0|$, de modo que $|x - x_0| < \epsilon/m$ acarreta $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

COROLÁRIO 1 — *Uma aplicação linear biunívoca $f: E \to F$, de E sôbre F, é um homeomorfismo se, e sòmente se, existem números reais $m > 0$, $n > 0$, tais que $n|x| \leq |f(x)| \leq m|x|$ para todo $x \in E$.*

Com efeito, seja $g = f^{-1}: F \to E$. Para que g seja contínua, é necessário e suficiente que exista um número real $k > 0$ tal que $|g(y)| \leq k|y|$ para todo $y \in F$. Pondo $y = f(x)$, $x \in E$, temos $g(y) = x$ e esta desigualdade se torna $|x| \leq k\, |f(x)|$, para todo $x \in E$, ou seja, $|f(x)| \geq (1/k)|x|$. Fazendo $n = 1/k$, o corolário fica demonstrado.

COROLÁRIO 2 — *Duas normas $|\ |$ e $|\ |_1$ no mesmo espaço vetorial E são equivalentes se, e sòmente se, existem números reais $m, n > 0$ tais que $|x| \leq n \cdot |x|_1$ e $|x|_1 \leq m\, |x|$ qualquer que seja $x \in E$.*

Isto resulta do Corol. 1, tomando-se $E = F$ e $f =$ identidade.

EXEMPLOS

16. A aplicação identidade $(\mathfrak{C}_0(I; R), |\ |_1) \to (\mathfrak{C}_0(I; R), |\ |)$ é uma aplicação linear descontínua. (Vide Ex. 12.)

17. Embora as normas $|f| = \sup. \{|f(x)|; x \in E\}$ e $|f|_1 = = \int_a^b |f(x)|dx$ não sejam equivalentes no espaço $\mathfrak{C}_0(I; R)$, $I = [a, b]$, a aplicação linear $\varphi : \mathfrak{C}(I, R) \to R$, definida por $\varphi(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ é contínua relativamente a qualquer dessas normas. Com efeito, relativamente a segunda, φ é uma contração fraca: $|\varphi(f)| = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx = = |f|_1$. Relativamente à primeira métrica, temos $|\varphi(f)| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \leq (b - a)\,|f|$, logo φ é contínua. (Ou seja: como $|\ |$ é mais fina do que $|\ |_1$, φ sendo contínua relativamente a $|\ |_1$ é contínua relativamente a $|\ |$.)

18. No espaço euclidiano R^n, as normas por nós consideradas são equivalentes. (Vide Ex. 3, Cap. I e Ex. 11, Cap. II.) Relativamente a essas normas, tôda aplicação linear $f : R^n \to E$ é contínua (E = qualquer espaço normado). Basta verificar êste fato para a norma $|x| = |x^1| + \ldots + + |x^n| = \Sigma|x^i|$, $x = (x^1, \ldots, x^n) \in R^n$. Sejam então $e_1 = (1,0,\ldots,0)$, $e_2 = (0,1,\ldots,0),\ldots, e_n = (0,\ldots, 0,1)$ e $m = \text{máx.} \{|f(e_1)|,\ldots,|f(e_n)|\}$. Temos $|f(x)| = |\Sigma x^i f(e_i)| \leq \Sigma |x^i|\,|f(e_i)| \leq m \cdot \Sigma |x^i| = m|x|$, qualquer que seja $x = (x^1, \ldots, x^n)$, o que estabelece a continuidade de f.

Observação — É verdade, e será demonstrado no Cap. VII, que duas normas quaisquer em R^n são equivalentes, de modo que o resultado acima é válido para tôda e qualquer norma tomada em R^n.

§ 6. Exercícios

1. Na definição de aplicação contínua, pode-se substituir $<$ por $\leq$.

2. Sejam M um espaço métrico e X um conjunto qualquer. Para cada $x \in X$, a aplicação $v_x: \mathfrak{B}(X; M) \to M$, definida por $v_x(f) = f(x)$, é uma contração fraca. Logo, v_x é contínua.

3. Uma aplicação $f : M \to N$ (M, N espaços métricos) diz-se *lipschitziana* quando existe um número $c > 0$ (a "constante de Lipschitz" de f) tal que $d(f(x),f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$, sejam quais forem $x, y \in M$. Tôda aplicação Lipschitziana é contínua. Se $c = 1$, f é uma contração fraca; se $0 < c < 1$, f diz-se uma *contração* (forte). Seja $f : R \to R$ derivável, com $|f'(x)| \leq c$ para todo $x \in R$. Então f é Lipschitziana.

4. Sejam M, N espaços métricos, $Y \subset N$ um subespaço e $i: Y \to N$ a aplicação de inclusão. Uma aplicação $f: M \to Y$ é contínua se, e sòmente se, a composta $i \circ f: M \to N$ também o fôr.

5. Na situação acima, suponha $Y \subset N$ e $i: Y \to M$. Pode-se afirmar que $f: M \to N$ é contínua em todos os pontos de Y se, e sòmente se, $f \circ i = f|Y: Y \to N$ fôr contínua?

6. Seja $f: R^2 \to R$ definida por $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $f(0, 0) = 0$. Para qualquer $a \in R$, as aplicações parciais $x \to f(x, a)$ e $y \to f(a, y)$ são contínuas em tôda a reta, mas f não é contínua no ponto $(0, 0)$.

7. Sejam M, N espaços métricos. A aplicação $v: \mathfrak{B}(M; N) \times M \to N$, definida por $v(f, x) = f(x) =$ valor de f no ponto x, é contínua no ponto (f_0, x_0) se, e sòmente se, f_0 é contínua no ponto x_0. Em particular, a restrição $v: \mathfrak{C}_0(M; N) \times M \to N$ é uma aplicação contínua.

8. Seja M um espaço discreto. Tôda aplicação $f: M \to N$ (onde N é qualquer espaço métrico) é contínua.

9. Sejam M, N espaços métricos. A *oscilação* de $f: M \to N$ no ponto $a \in M$ é o número $\omega(f; a) =$ ínfimo dos diâmetros dos conjuntos $f[B(a; r)]$, imagens por f das bolas abertas de centro a.

Prove:

a) f é contínua no ponto a se, e sòmente se, $\omega(f; a) = 0$.

b) Calcule a oscilação de $f: R \to R$ no ponto 0, onde $f(x) = \operatorname{sen} 1/x$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$.

10. Seja $f: R \to R$ definida por $f(x) = 0$ se x é irracional e $f(x) = 1/q$ se $x = p/q$, $q > 0$ é uma fração irredutível. Então f é contínua no ponto a se, e sòmente se, a fôr irracional.

11. Estabelecer os seguintes homeomorfismos:

a) Entre $R^{n+1} - \{a\}$ e $S^n \times R$ (onde $a \in R^{n+1}$).

b) Entre o semi-espaço superior aberto $H = \{x \in R^n; x^n > 0\}$ e o espaço inteiro R^n; entre $\overline{H} = \{x \in R^n; x^n \geq 0\}$ e $R^{n-1} \times [0, \infty)$.

c) Entre $\overline{P} = \{x \in R^n; x^1 \geq 0, \ldots, x^n \geq 0\}$ e $R^{n-1} \times [0, \infty)$.

12. Sejam S^n a esfera unitária de dimensão n, P^n o espaço projetivo real n-dimensional, com a métrica definida no Exerc. 15, Cap. I, e $\pi: S^n \to P^n$ a projeção canônica. Uma aplicação $f: P^n \to M$, num espaço métrico arbitrário M, é contínua se, e sòmente se, $f \circ \pi: S^n \to M$ fôr contínua.

13. Sejam $f, g: M \to N$ contínuas. M, N espaços métricos. Se $f(a) \neq g(a)$ para algum $a \in M$, existe uma bola $B = B(a; r)$ tal que $f(x) \neq g(y)$ quaisquer que sejam $x, y \in B$.

14. Para cada $i = 1, \ldots, n$, sejam $h_i: M_i \to N_i$ homeomorfismos. Então $h: M_1 \times \ldots \times M_n \to N_1 \times \ldots \times N_n$, definido por $h(x_1, \ldots, x_n) = (h_1(x_1), \ldots, h_n(x_n))$, é um homeomorfismo.

Espaços Topológicos

Capítulo III

§ 1. Introdução

A fim de estudar sistemàticamente as propriedades das aplicações contínuas em espaços métricos, convém destacar e analisar com algum detalhe, certos conceitos fundamentais como os de conjunto aberto, vizinhança, interior, fronteira, conjunto fechado, fecho e ponto de acumulação. Ao estudarmos êsses conceitos, veremos que grande número de idéias, a começar pela própria noção de aplicação contínua de um espaço métrico noutro, podem ser formuladas em têrmos do conceito de conjunto aberto, sem fazer intervir diretamente a distância. Isto conduz à concepção geral de espaço topológico, que introduziremos neste capítulo.

A consideração de espaços cuja topologia não pode ser definida através de uma métrica, não resulta do mero desejo de generalizar pelo prazer de generalizar. No Cap. IV (Exs. 21 e 22) daremos o primeiro exemplo "natural" de um tal espaço. Êles ocorrem freqüentemente quando se procura tratar de vários tipos de convergência de funções. O Cap. IX será dedicado ao estudo de alguns dêsses espaços funcionais. Aqui, preparemos o terreno, lançando as bases.

Convém observar que, mesmo desejando estudar apenas a topologia dos espaços métricos, os conceitos que apresentaremos a seguir são indispensáveis.

O capítulo termina com um parágrafo dedicado ao importante conceito de espaço conexo, onde algumas idéias geométricas interessantes aparecem.

§ 2. Conjuntos Abertos num Espaço Métrico

Um subconjunto A de um espaço métrico M chama-se *aberto* quando todo ponto $a \in A$ é centro de uma bola aberta inteiramente contida em A.

Em outras palavras, para cada $a \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que se $x \in M$ e $d(x, a) < \epsilon$ então $x \in A$. Intuitivamente: sempre que um conjunto aberto A contém um ponto a, deve conter também *todos* os pontos de M suficientemente próximos de a.

Proposição 1 — *Tôda bola aberta $B(a; r)$ num espaço métrico M é um subconjunto aberto de M.*

Demonstração: Para cada ponto $x \in B(a; r)$, temos $d(x, a) < r$ e, portanto, $\epsilon = r - d(x, a) > 0$. Afirmamos que a bola $B(x; \epsilon)$ está contida em $B(a; R)$. De fato, se $y \in B(x; \epsilon)$ então $d(y, x) < r - d(x, a)$ e portanto

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < r - d(x, a) + d(x, a) = r,$$

logo $y \in B(a; r)$.

EXEMPLOS

1. Os intervalos abertos finitos (a, b) são subconjuntos abertos da reta, em virtude da Prop. 1. Também os intervalos abertos ilimitados $(a, +\infty)$ e $(-\infty, b)$ são subconjuntos abertos da reta. Com efeito, se $x \in (a, +\infty)$, isto é, $x > a$, então $\epsilon = x - a > 0$ e o intervalo (bola aberta) $B(x; \epsilon) = (a, 2x - a)$ está contido em $(a, +\infty)$ pois $2x - a = x + (x - a) > x > a$. De modo análogo mostraríamos que $(-\infty, b)$ é aberto.

2. Um ponto a num espaço métrico M é um subconjunto aberto de M se, e sòmente se, a fôr um ponto isolado de M. Um espaço métrico M é discreto se, e sòmente se, qualquer subconjunto $X \subset M$ é aberto.

3. Em qualquer espaço métrico M, o complementar de cada ponto $a \in M$ é um subconjunto aberto de M. Com efeito, se $x \in M - \{a\}$, isto é, $d(x, a) > 0$, então a bola aberta $B(x; \epsilon)$, com $\epsilon = d(x, a)$ não contém o ponto $a : B(x; \epsilon) \subset M - \{a\}$. Mais geralmente, o complementar $M - F$ de qualquer subconjunto finito $F = \{a_1, \ldots, a_n\}$ de M é

um subconjunto aberto de M pois se $x \in M - F$ então o número $\epsilon = \text{mín.}\{d(x, a_1), \ldots, d(x, a_n)\}$ é > 0 e a bola aberta $B(x; \epsilon)$ não contém nenhum dos pontos $a_1, \ldots, a_n$, isto é, $B(x; \epsilon) \subset M - F$.

4. Nenhuma bola fechada $D = D(a; r)$ é um subconjunto aberto do espaço euclidiano R^n $(n \geq 1)$. Por simplicidade de notação consideraremos apenas uma bola $D = D(0; r)$ com centro na origem.

Seja $v \in R^n$ um vetor $\neq 0$; ponhamos $x = rv/|v|$. Então $|x| = r$, donde $x \in D$. Mas nenhuma bola aberta $B(x; \epsilon)$ pode estar contida em D pois, tomando $y = \left(r + \frac{\epsilon}{2}\right) v/|v|$, temos $|y - x| = \epsilon/2$, donde $y \in B(x; \epsilon)$ mas $|y| = r + \frac{\epsilon}{2}$ e portanto $y \notin D$. O mesmo argumento mostra que nenhuma esfera $S(a; r)$ é um subconjunto aberto do espaço R^n. Evidentemente o mesmo raciocínio se emprega em qualquer espaço vetorial normado (como por exemplo $\mathfrak{B}(X; E)$ ou $\mathfrak{C}_0(X; E)$ em vez do R^n apenas. Mas em alguns espaços métricos, pode ocorrer que a bola fechada $D(a; r)$ coincida com a bola aberta $B(a; r)$ e então D será um subconjunto aberto de M. [Se M fôr discreto, isto acontece. Também acontece quando $d(x, y) < r$ para quaisquer $x, y \in M$.] É possível, ainda, que uma esfera $S(a, r)$ seja aberta no espaço métrico M.

O exemplo seguinte, por sua importância, será destacado como uma proposição:

Proposição 2 — *Sejam M, N espaços métricos e $f: M \to N$ uma aplicação. As aplicações de M em N que estão a uma distância finita de f e são descontínuas num dado ponto $a \in M$ formam um subconjunto aberto do espaço $\mathfrak{B}_f(M; N)$.*

Demonstração: Seja $g \in \mathfrak{B}_f(M; N)$ descontínua no ponto a. Isto significa que existe $\epsilon > 0$ tal que, para qualquer bola B de centro a em M, é sempre possível obter um ponto $x_B \in B$ com $d(g(x_B), g(a)) \geq \epsilon$. Afirmamos que tôda aplicação $h: M \to N$ tal que $d(g, h) < \epsilon/3$ é descontínua no ponto a. Com efeito: $\epsilon \leq d(g(x_B), g(a)) \leq d(g(x_B, h(x_B)) + d(h(x_B), h(a)) + d(h(a), g(a))$. Como $d(g, h) < \epsilon/3$, a primeira e a terceira parcelas da soma acima são menores do que $\epsilon/3$. Logo $d(h(x_B), h(a)) \geq \epsilon/3$. Assim para cada bola B de centro a em M, existe um ponto $x_B \in B$ tal que $d(h(x_B), h(a)) \geq \epsilon/3$, o que prova ser h descontínua no ponto a.

Corolário — *As aplicações descontínuas pertencentes a* $\mathfrak{B}_f(M;N)$ *formam um subconjunto aberto dêste espaço.*

Com efeito, tôda aplicação descontínua $g : M \to N$ é descontínua em algum ponto $a \in M$ e portanto existe uma bola $B(g;\epsilon)$ em $\mathfrak{B}_f(M;N)$ formada de aplicações descontínuas no ponto a; em particular descontínuas.

Tomando $f : M \to N$ uma aplicação constante, vemos que as aplicações descontínuas limitadas formam um subconjunto aberto de $\mathfrak{B}(M;N)$.

Proposição 3 — *Os subconjuntos abertos de um espaço métrico M gozam das seguintes propriedades:*

1) *o espaço inteiro M e o conjunto vazio* $\varnothing$ *são subconjuntos abertos de M;*

2) *se* $(A_\lambda)_{\lambda \in A}$ *fôr uma família qualquer (finita ou infinita) de subconjuntos abertos de M, sua reunião* $A = \bigcup_{\lambda \in A} A_\lambda$ *será um subconjunto aberto de M;*

3) *a interseção* $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ *de uma família finita de subconjuntos* $A_1, \ldots, A_n$ *abertos em M é ainda um subconjunto aberto de M.*

Demonstração:

1) É claro que M é aberto; para mostrar que $\varnothing$ é aberto basta notar que um subconjunto $X \subset M$ só deixa de ser aberto quando existe um ponto $x \in X$ tal que nenhuma bola de centro x está contida em X. Como não existe $x \in \varnothing$, o conjunto vazio não viola a condição que define os abertos.

2) Dado $x \in A$, existe um índice $\lambda \in A$ tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, existe uma bola $B(x;\epsilon)$ contida em A_λ. Logo $B(x;\epsilon) \subset A$.

3) Seja $x \in A_1 \cap \ldots \cap A_n$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, existe uma bola aberta $B(x;\epsilon_i)$ contida em A_i. Tomemos $\epsilon = \text{mín.}\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$. Então $\epsilon > 0$ e $B(x;\epsilon) \subset B(x;\epsilon_i) \subset A_i$ para cada i. Logo $B(x;\epsilon) \subset A_1 \cap \cap \ldots \cap A_n$, concluindo a demonstração.

Corolário — *Um subconjunto* $A \subset M$ *é aberto em M se, e sòmente se, A é uma reunião de bolas abertas de M.*

Como bolas abertas são subconjuntos abertos de M (Prop. 1), tôda reunião de bolas abertas é um aberto de M, pela 2.ª parte da proposição acima. Recìprocamente, se $A \subset M$ é aberto, para cada $x \in A$ existe uma bola aberta B_x com $\{x\} \subset B_x \subset A$. Logo, $A \subset \bigcup_{x \in A} B_x \subset A$, o que mostra ser $A = \bigcup_{x \in A} B_x$, uma reunião de bolas abertas.

EXEMPLO

5. Seja X um subconjunto não-vazio de um espaço métrico M. Dado $\epsilon > 0$, a *"bola aberta" de raio ϵ em tôrno do conjunto X* é o conjunto $B(X; \epsilon) = \bigcup_{x \in X} B(x; \epsilon)$, reunião de tôdas as bolas abertas de raio ϵ com centro em algum ponto $x \in X$. Pela Prop. 3, $B(X; \epsilon)$ é um subconjunto aberto de M. Êle consiste de todos os pontos $y \in M$ tais que $d(y, x) < \epsilon$ para algum $x \in X$, isto é, $B(X; \epsilon) = \{y \in M; d(y, X) < \epsilon\}$.

Observações — 1) A interseção de uma família *infinita* de subconjuntos abertos não é, em geral, um subconjunto aberto. Por exemplo, todo ponto $x \in M$ é a interseção de tôdas as bolas abertas com centro em x. Mas, a menos que x seja um ponto isolado, $\{x\}$ não é um subconjunto aberto de M.

2) A propriedade "A é aberto" não tem um sentido intrínseco, isto é, não é uma propriedade do subespaço A. Ela se refere à situação dos pontos de A relativamente aos demais pontos do espaço métrico M. Por isso devemos sempre dizer que "A é um subconjunto aberto *de* M" ou que "A é aberto *em* M". Pode acontecer que M seja, por sua vez, subespaço de um espaço maior N e então pode dar-se o caso de A ser aberto em M sem que o seja em N. Por exemplo, o intervalo $(0, 1)$ é um subconjunto aberto da reta R. Podemos considerar $R \subset R^2$, digamos, tomando R como o eixo das abscissas $(y = 0)$. Evidentemente, o intervalo $(0, 1)$ não será um subconjunto aberto do plano. Num caso como êste, a expressão "A é um conjunto aberto" é ambígua. É preciso esclarecer em que espaço se diz que A é aberto. A proposição abaixo caracteriza os subconjuntos abertos de um subespaço $X \subset M$ em têrmos dos abertos de M.

Proposição 4 — *Sejam M um espaço métrico e $X \subset M$ um subespaço. Um subconjunto $A' \subset X$ é aberto em X se, e sòmente se, $A' = A \cap X$, onde A é um subconjunto aberto de M.*

Demonstração: Indicando com B' as bolas abertas de X e com B as de M, é claro que $B'(x; \epsilon) = B(x; \epsilon) \cap X$ para cada $x \in X$. Pelo corolário da Prop. 3, $A' \subset X$ é aberto em X se, e sòmente se, $A' = \bigcup_x B_x' = \bigcup_x (B_x \cap X) = (\bigcup_x B_x) \cap X = A \cap X$, onde $A = \bigcup_x B_x$ é um aberto de M.

Corolário — *Seja $X \subset M$ aberto. Um subconjunto $A' \subset X$ é aberto em X se, e sòmente se, A' é aberto em M.*

A proposição seguinte mostra que o conhecimento dos subconjuntos abertos determina tôdas as aplicações contínuas.

Proposição 5 — *Sejam M, N espaços métricos. Para que uma aplicação $f : M \to N$ seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa $f^{-1}(A')$ de todo subconjunto aberto $A' \subset N$ seja um subconjunto aberto de M.*

Demonstração: Seja f contínua e $A' \subset N$ um aberto. Provaremos que $A = f^{-1}(A')$ é aberto em M. De fato, para cada ponto $a \in A$, $f(a) \in A'$. Sendo A' aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(f(a); \epsilon) \subset A'$. Sendo f contínua no ponto a, ao ϵ corresponde um $\delta > 0$ tal que $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \epsilon) \subset \subset A'$. Mas $f(B(a; \delta)) \subset A'$ significa que $B(a; \delta) \subset f^{-1}(A') = A$. Logo, A é um aberto pois, contendo um ponto a, contém também uma bola $B(a; \delta)$.

Reciprocamente, suponhamos que $f : M \to N$ é tal que, para todo aberto $A' \subset N$, $A = f^{-1}(A')$ é aberto em M. Seja $a \in M$ um ponto qualquer. Mostraremos que f é contínua no ponto a. Ora, tôda bola $B(f(a); \epsilon) = A'$ é um aberto de N contendo $f(a)$. Logo, $A = f^{-1}(A')$ é um aberto de M contendo a. Portanto, existe uma bola $B(a; \delta) \subset A$, isto é, $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \epsilon)$, o que conclui a demonstração.

Escólio: *Para que a aplicação $f : M \to N$ seja contínua no ponto $a \in M$ é necessário e suficiente que, para cada aberto $A' \subset N$, com $f(a) \in A'$, exista um aberto $A \subset M$, com $a \in M$, tal que $f(A) \subset A'$.*

Corolário 1 — *Sejam $A_1 \subset M_1, \ldots, A_n \subset M_n$ subconjuntos abertos.*

Então $A_1 \times \ldots \times A_n$ é um subconjunto aberto do produto cartesiano $M_1 \times \ldots \times M_n$.

Com efeito, as projeções $p_i : M_1 \times \ldots \times M_n \to M_i$ são contínuas ($i = 1, 2, \ldots, n$) logo $p_1^{-1}(A_1)$, $p_2^{-1}(A_2)$, ..., $p_n^{-1}(A_n)$ são subconjuntos abertos de $M_1 \times \ldots \times M_n$ e como

$$A_1 \times \ldots \times A_n = p_1^{-1}(A_1) \cap \ldots \cap p_n^{-1}(A_n),$$

segue-se da Prop. 3, que $A_1 \times \ldots \times A_n$ é aberto em $M_1 \times \ldots \times M_n$.

Corolário 2 — *Sejam $f_1, \ldots, f_n : M \to N$ aplicações contínuas e $a_1, \ldots, a_n \in N$. O conjunto dos pontos $x \in M$ tais que $f_1(x) \neq a_1, \ldots, f_n(x) \neq a_n$ é aberto em M. Se $f_1, \ldots, f_n : M \to R$ são funções reais contínuas é ainda aberto o subconjunto de M definido por*

$$f_1(x) > 0, \ldots, f_n(x) > 0.$$

Com efeito, no primeiro caso, sabemos que $A_1' = N - \{a_1\}, \ldots, A_n' = N - \{a_n\}$ são abertos em N (Ex. 3), logo $\{x \in M; f_1(x) \neq a_1, \ldots, f_n(x) \neq a_n\} = f_1^{-1}(A_1') \cap \ldots \cap f_n^{-1}(A_n')$ é aberto em M.

No segundo caso, o conjunto $(0, +\infty)$ é aberto na reta. Logo, $\{x \in M; f_1(x) > 0, \ldots, f_n(x) > 0\} = f_1^{-1}(0, \infty) \cap \ldots \cap f_n^{-1}(0, \infty)$ é aberto em M. (É claro que, para alguns valôres de i, poderíamos substituir $>$ por $<$ sem que o resultado deixasse de ser válido.)

Observação — A imagem direta $f(A)$ de um subconjunto aberto $A \subset M$ por uma aplicação contínua $f : M \to N$ não é necessàriamente um subconjunto aberto de N. Por exemplo, se $f : R \to R$ é a função real contínua definida por $f(x) = x^2$, para qualquer intervalo aberto $(-a, a) = A$, a imagem $f(A)$ é o intervalo $[0, a^2)$, que não é um subconjunto aberto da reta.

Uma aplicação $f : M \to N$ que transforma cada subconjunto aberto $A \subset M$ num subconjunto aberto $f(A) \subset N$ chama-se uma *aplicação aberta.*

Uma aplicação aberta pode não ser contínua. Por exemplo se $f : M \to N$ é uma aplicação contínua e biunívoca, de M sôbre N que não é um homeomorfismo, então $f^{-1} : N \to M$ é uma aplicação aberta (*cf.* Prop. 5) descontínua. (Vide Cap. II, §3.)

Todo homeomorfismo $h : M \to N$ é uma aplicação aberta pois $k = h^{-1} : N \to M$ é contínua e portanto, para cada aberto $A \subset M$, $h(A) = k^{-1}(A)$ é aberto em N, pela Prop. 5. Na realidade, o seguinte fato mais preciso é uma conseqüência imediata da Prop. 5.

Proposição 6 — *Sejam M e N espaços métricos e $h : M \to N$ uma aplicação biunívoca de M sôbre N. A condição necessária e suficiente para que h seja um homeomorfismo de M sôbre N é: para cada $X \subset M$, $h(X)$ é aberto em N se, e sòmente se, X é aberto em M.*

Demonstração: Óbvia.

Corolário — *Sejam d e d' métricas no mesmo conjunto M. Para que d e d' sejam equivalentes, é necessário e suficiente que os espaços métricos, (M, d) e (M, d') possuam os mesmos subconjuntos abertos.*

Depois dos homeomorfismos, as aplicações abertas mais importantes são as projeções.

Proposição 7 — *Seja $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ um produto cartesiano de espaços métricos. Cada projeção $p_i : M \to M_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ é uma aplicação contínua aberta.*

Demonstração: Em virtude do Corolário acima, não faz diferença qual das 3 métricas usuais consideramos em M. Escolhamos então $d(x, y) =$

$= \text{máx.}\ \{d(x_1, y_1), \ldots, d(x_n, y_n)\}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Relativamente a esta métrica, $B(x; r) = B(x_1; r) \times \ldots \times B(x_n; r)$. Seja $A \subset M$ aberto; provaremos que $A' = p_i(A)$ é aberto em M_i. Dado $a_i \in A'$, existe $a = (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) \in A$ tal que $p_i(a) = a_i$. Sendo A aberto existe uma bola $B = B(a; r) = B(a_1; r) \times \ldots \times B(a_i; r) \times \ldots \times B(a_n; r)$ contida em A. Segue-se que $B(a_i; r) = p_i(B) \subset p_i(A) = A'$, logo A' é aberto em M_i, como devíamos demonstrar.

§ 3. Espaços Topológicos

De acôrdo com a Prop. 5, o fato de uma aplicação $f : M \to N$ ser contínua não depende dos números que exprimem as distâncias entre pontos dêsses espaços, mas sòmente das coleções de conjuntos abertos de M e de N. Isto motiva a consideração do conceito mais geral de espaço topológico, onde os conjuntos abertos não são necessàriamente definidos a partir de uma distância. Os axiomas a que êsses conjuntos abertos devem satisfazer são sugeridos pela Prop. 3.

Uma *topologia* num conjunto X é uma coleção τ de subconjuntos de X, chamados os *subconjuntos abertos* (segundo a topologia τ) satisfazendo às seguintes condições:

1) X e o subconjunto vazio $\varnothing$ são abertos;

2) a reunião de uma família qualquer de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto;

3) a interseção de uma família finita de subconjuntos abertos é um subconjunto aberto.

Observação — É equivalente, em vez de 3), afirmar apenas que a interseção de *dois* abertos é um aberto.

Um *espaço topológico* é um par (X, τ) onde X é um conjunto e τ é uma topologia em X. Freqüentemente se diz apenas "o espaço topológico X", mencionando τ sòmente quando fôr necessário para evitar ambigüidade.

Uma aplicação $f : X \to Y$, de um espaço topológico X num espaço topológico Y, diz-se *contínua* quando a imagem inversa $f^{-1}(B)$ de todo aberto $B \subset Y$ fôr um aberto em X.

A relação $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$ mostra que a composta $g \circ f : X \to Z$ de duas aplicações contínuas $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ é uma aplicação contínua.

Mais especìficamente, f diz-se *contínua no ponto* $a \in X$ quando, para cada aberto $B \subset Y$, com $f(a) \in B$, existir um aberto $A \subset X$, com $a \in A$, tal que $f(A) \subset B$.

É fácil verificar que se $f : X \to Y$ é contínua no ponto $a \in X$ e $g : Y \to Z$ é contínua no ponto $b = f(a) \in Y$, então $g \circ f : X \to Z$ é contínua no ponto a.

A relação entre essas duas definições é a seguinte:

Proposição 8 — *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua se, e sòmente se, é contínua em cada ponto $z \in X$.*

Demonstração: Seja $f : X \to Y$ contínua. Dados um ponto $a \in X$ e um aberto $B \subset Y$ com $f(a) \in B$, o conjunto $A = f^{-1}(B)$ é aberto em X. Como $a \in A$ e $f(A) = f(f^{-1}(B) \subset B$, isso estabelece a continuidade de f no ponto a. Recìprocamente, seja f contínua em cada ponto $a \in X$. Dado $B \subset Y$ aberto, seja $A = f^{-1}(B)$. Para cada $x \in A$, tem-se $f(x) \in B$ e como f é contínua no ponto x, existe um aberto $A_x \subset X$, com $x \in A_x$, $f(A_x) \subset B$. Em outras palavras, tem-se $\{x\} \subset A_x \subset A$ para cada $x \in A$. Logo, $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} A_x \subset A$, isto é, $A = \bigcup_x A_x$. Assim, $A = f^{-1}(B)$ é aberto em X, por ser uma reunião de abertos, e $f : X \to Y$ é contínua.

Um *homeomorfismo* $h : X \to Y$, de um espaço topológico X sôbre um espaço topológico Y é uma aplicação contínua e biunívoca de X sôbre Y, cuja inversa $h^{-1} : Y \to X$ também é contínua.

Todo espaço métrico M pode ser considerado, de modo natural, como um espaço topológico, quando se toma em M a coleção de abertos definidos a partir da métrica de M, como no parágrafo anterior. A Prop. 5 mostra que, relativamente a essa topologia, as aplicações contínuas coincidem com aquelas definidas no Cap. II por meio de ϵ' s e δ's.

Um espaço topológico X diz-se *metrizável* quando é possível definir uma métrica d em X tal que os abertos definidos por d, de acôrdo com o §2, coincidem com os abertos da topologia de X. Nem todo espaço topológico é metrizável.

EXEMPLOS

6. Seja X um conjunto qualquer. Podemos definir uma topologia τ_0 em X tomando *todos* os subconjuntos de X como abertos. τ_0 chama-se a *topologia discreta*. (X, τ_0) é um espaço metrizável: basta considerar a métrica na qual $d(x, y) = 1$ para $x \neq y$ quaisquer. No outro extremo, podemos considerar uma topologia τ_1 em X, na qual os únicos abertos são X e o conjunto vázio $\varnothing$ (topologia *caótica*). Se X contiver pelo menos dois pontos, (X, τ_1) não será um espaço metrizável, em virtude da Prop. 2, Cap. I.

7. No plano R^2, definamos uma topologia τ declarando abertos todos os conjuntos que se podem exprimir como reuniões de regiões limitadas

por quadrados de lados paralelos aos eixos (excluídos os lados em cada região). De acôrdo com o corolário da Prop. 3, (R^2, τ) é um espaço metrizável, seus abertos sendo provenientes da métrica $|x - y| = \text{máx.}\{|x^1 - y^1|, |x^2 - y^2|\}$.

Sejam τ e τ' duas topologias no mesmo conjunto X.

Diremos que τ é *mais fina* do que τ' quando $\tau \supset \tau'$, isto é, quando todo aberto segundo τ' fôr necessàriamente aberto segundo τ. Anàlogamente, diremos que τ é *menos fina* do que τ' quando $\tau \subset \tau'$, ou seja, quando dado $A \subset X$, $A \in \tau$ implicar $A \in \tau'$. Por exemplo, tôda topologia τ em X é menos fina do que a topologia discreta e mais fina do que a topologia caótica.

Dadas as topologias τ e τ' num conjunto X, para que τ seja mais fina do que τ', é necessário e suficiente que a aplicação identidade $i : (X, \tau) \to$ $\to (X, \tau')$ seja contínua. Segue-se que, dadas duas métricas d e d' no conjunto M, d é mais fina do que d' (no sentido do capítulo anterior) se, e sòmente se, a topologia definida por d em M é mais fina do que a definida por d'. Podemos então afirmar:

Para que duas métricas d e d' no mesmo conjunto M definam a mesma topologia, é necessário e suficiente que elas sejam equivalentes.

Como em espaços métricos, uma aplicação $f : X \to Y$, de um espaço topológico X num espaço topológico Y diz-se *aberta* quando, para cada aberto $A \subset X$, $f(A)$ é aberto em Y.

Uma aplicação biunívoca $f : X \to Y$, do espaço topológico X sôbre o espaço topológico Y, é um homeomorfismo se, e sòmente se, é contínua e aberta.

Os espaços topológicos mais interessantes satisfazem ainda à condição de que pontos distintos podem ser "separados" por abertos disjuntos.

Um espaço topológico X chama-se um *espaço de Hausdorff* (*ou espaço separado*) quando, dados dois pontos arbitrários $x \neq y$ em X, existem abertos $A, B \subset X$ tais que $x \in A$, $y \in B$ e $A \cap B = \varnothing$.

Pontos $x \neq y$ num espaço de Hausdorff X.

Em virtude da Prop. 2, Cap. I, todo espaço metrizável é um espaço de Hausdorff. A recíproca é falsa. (Vide Cap. IV, § 6.) Todo espaço topológico discreto é de Hausdorff mas a topologia caótica num espaço com mais de um ponto não é de Hausdorff. Resulta imediatamente da definição que, num espaço de Hausdorff X, o complementar $X - \{x\}$

de cada ponto $x \in X$ é um subconjunto aberto de X. Esta propriedade não é, porém, suficiente para fazer de X um espaço de Hausdorff, como se vê no exemplo a seguir.

EXEMPLO

8. Seja X um conjunto infinito. Consideremos a coleção τ formada pelo conjunto vazio $\emptyset \subset X$ e mais os complementares dos subconjuntos finitos de X. (Por exemplo, se $X = \{1, 2, 3, \ldots\}$, um subconjunto $A \subset X$ pertence à coleção τ se, e sòmente se, existe um inteiro n_0 tal que $n \geq n_0$ implica $n \in A$.) Fazendo uso das relações $X - \bigcup_\lambda A_\lambda = \bigcap_\lambda (X - A_\lambda)$ e $X - (A_1 \cap \ldots \cap A_n) = (X - A_1) \cup \ldots \cup (X - A_n)$, verifica-se sem dificuldade que τ é uma topologia em X. Com a topologia τ, X não é um espaço de Hausdorff. De fato, dados os abertos não vazios $A, B \subset X$, tem-se sempre $A \cap B \neq \emptyset$ pois $A = X - F$, $B = X - G$ (onde $F, G \subset X$ são finitos) e portanto $A \cap B = X - (F \cup G)$. Como X é infinito, $A \cap B \neq \emptyset$. Em particular, (X, τ) não é metrizável. Evidentemente, o complementar $X - \{x\}$ de cada ponto $x \in X$ é um subconjunto aberto na topologia τ.

A noção de espaço topológico permite esclarecer a diferença entre as *propriedades métricas* e as *propriedades topológicas* de um espaço métrico M. As primeiras são invariantes por isometrias e as últimas por homeomorfismos. Por exemplo, o fato de ser a métrica de M limitada, e o próprio valor do diâmetro $\delta(M)$ são invariantes através de uma isometria $f : M \to N$: $N = f(M)$ será também limitado e $\delta(N) = \delta(M)$. Mas essas não são propriedades topológicas: todo espaço métrico, mesmo ilimitado, é homeomorfo a um espaço métrico limitado; basta substituir a métrica d de M por $d' = \inf. (1, d)$. Já a propriedade de possuir um ponto isolado, por exemplo, é uma propriedade topológica de M : se x é isolado em M, para todo homeomorfismo $h : M \to N$, $h(x)$ será isolado em N.

Em suma: as propriedades topológicas de um espaço métrico M são aquelas que podem ser definidas através da coleção de abertos de M, ou seja, cuja validez não se altera quando se troca a métrica de M por outra métrica equivalente.

Discutiremos agora dois métodos bastante úteis de construir novos espaços topológicos a partir de outros.

A) *Topologia induzida. Subespaços.* Seja $f : S \to X$ uma aplicação de um conjunto arbitrário S num espaço topológico X. A coleção τ das imagens inversas $f^{-1}(A)$ dos abertos $A \subset X$ pela aplicação f é uma topologia em S, conforme resulta imediatamente das relações $\bigcup_\lambda f^{-1}(A_\lambda) =$

$= f^{-1}(\bigcup_\lambda A_\lambda)$ e $f^{-1}(A_1) \cap \ldots \cap f^{-1}(A_n) = f^{-1}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$. A topologia τ chama-se a *topologia induzida* em S pela aplicação $f : S \to X$.

Se S tem a topologia induzida por uma aplicação $f : S \to X$ então, pela própria definição, a imagem inversa $f^{-1}(A)$ de cada aberto $A \subset X$ é aberto em S, de modo que f é contínua. Além disso, qualquer outra topologia em S segundo a qual f seja contínua deve conter como abertos pelo menos os conjuntos $f^{-1}(A)$ com $A \subset X$ aberto. Segue-se então que a topologia induzida por $f : S \to X$ é a *menos fina* dentre tôdas as topologias em S que tornam a aplicação $f : S \to X$ contínua. Esta propriedade caracteriza a topologia induzida.

O caso particular mais importante da topologia induzida é aquêle em que $S \subset X$ e f reduz-se à aplicação de inclusão $i : S \to X$ [onde $i(x) = x$ para todo $x \in S$]. Neste caso, dado $A \subset X$, tem-se $i^{-1}(A) = A \cap S$, de modo que a topologia induzida por i em S tem como abertos as interseções $A \cap S$ dos abertos $A \subset X$ com o subconjunto S. Munido dessa topologia, S chama-se um *subespaço* do espaço topológico X. Normalmente, quando se considera um subconjunto S de um espaço topológico X, toma-se em S a topologia induzida por X em S, isto é, considera-se S como subespaço de X, a menos que se diga explìcitamente o contrário.

EXEMPLOS

9. Se X fôr um espaço metrizável, então a topologia induzida em qualquer subconjunto $S \subset X$ também é metrizável. Mais precisamente, se a topologia de X é definida por meio de uma métrica d, então a topologia induzida em S é definida pela restrição de d ao subconjunto S, conforme resulta da Prop. 4 acima.

9a. Outra propriedade do espaço X que também é "herdada" pelos seus subespaços é a propriedade de Hausdorff. Com efeito, se X é de Hausdorff, e $S \subset X$, dados $x, y \in S$, com $x \neq y$, existem abertos U, V em X tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \varnothing$. Resulta daí que $U_1 = U \cap S$ e $V_1 = V \cap S$ são abertos em S, com $x \in U_1$, $y \in V_1$ e $U_1 \cap V_1 = \varnothing$, de modo que S é um espaço de Hausdorff.

— A topologia *induzida* goza da seguinte propriedade transitiva: se S tem a topologia induzida pela aplicação $f : S \to X$ então a topologia induzida em T pela aplicação $g: T \to S$ é a mesma induzida pela aplicação $f \circ g : T \to X$. Isto é mais difícil de dizer do que provar. Basta lembrar que $(f \circ g)^{-1}(A) = g^{-1}(f^{-1}(A))$. Em particular, se $T \subset S \subset X$, a topologia de T como subespaço de S (onde S é, naturalmente, considerado como subespaço de X) coincide com a topologia de T como subespaço de X.

9b) Topologia co-induzida. Espaço quociente. Sejam X um espaço topológico, Q um conjunto qualquer e $\varphi : X \to Q$ uma aplicação de X em Q. Indiquemos com τ a coleção dos subconjuntos $B \subset Q$ tais que $\varphi^{-1}(B)$ é aberto em X. Verifica-se fàcilmente que τ é uma topologia em Q, chamada a *topologia co-induzida* pela aplicação φ.

Relativamente à topologia co-induzida τ, a aplicação $\varphi : X \to Q$ é contínua. Além disso, dado $C \subset Q$, se $C \notin \tau$ então $\varphi^{-1}(C)$ não é aberto em X. Logo, qualquer topologia *estritamente mais fina* do que τ (isto é, contendo τ pròpriamente) torna φ descontínua. Em outras palavras, a topologia co-induzida é a mais fina em Q com a propriedade de tornar a aplicação $\varphi : X \to Q$ contínua. Êste fato caracteriza a topologia co-induzida.

Nas aplicações, desempenha papel de relêvo o seguinte critério de continuidade para funções $g : Q \to Z$, onde Z é um espaço topológico qualquer e Q possui a topologia co-induzida por uma aplicação $\varphi : X \to Q$:

$g : Q \to Z$ é contínua se, e sòmente se, $g \circ \varphi : X \to Z$ é contínua.

Demonstração: Como $\varphi : X \to Q$ é contínua, a continuidade de g implica a de $g \circ \varphi$. Recìprocamente, se $g \circ \varphi : X \to Z$ fôr contínua, então, para cada aberto $C \subset Z$, $\varphi^{-1}(g^{-1}(C)) = (g \circ \varphi)^{-1}(C)$ é aberto em X. Pela definição da topologia co-induzida, isto quer dizer que $g^{-1}(C)$ é aberto em Q e, por conseguinte, $g : Q \to Z$ é contínua.

Quando se considera, num conjunto Q, a topologia co-induzida por uma aplicação $\varphi : X \to Q$, não se perde muito em supor que $\varphi(X) = Q$. Com efeito, dado *qualquer* subconjunto $C \subset Q - \varphi(X)$, temos $\varphi^{-1}(C) = \emptyset$, donde $\varphi^{-1}(C)$ é aberto em X e portanto C é aberto em Q. Assim, relativamente à topologia co-induzida, $Q - \varphi(X)$ é um subespaço discreto. Como tal, o papel de $Q - \varphi(X)$ na topologia de Q é irrelevante.

Sejam X um espaço topológico e $\varphi : X \to Q$ uma aplicação de X *sôbre* um conjunto Q. Para todo $T \subset Q$ tem-se $\varphi[\varphi^{-1}(T)] = T$ mas, dado $S \subset X$, em geral tem-se apenas $\varphi^{-1}[\varphi(S)] \supset S$. Um subconjunto $S \subset X$ diz-se *saturado* (relativamente a φ) quando $\varphi^{-1}[\varphi(S)] = S$. Isto significa que se $\varphi(x) = \varphi(x')$ e $x \in S$ então $x' \in S$. Qualquer que seja $T \subset Q$, $\varphi^{-1}(T)$ é um subconjunto saturado de X. Segue-se que, para todo $S \subset X$, o conjunto $\varphi^{-1}[\varphi(S)]$ é saturado. Êste é o menor conjunto saturado que contém S e chama-se o *saturamento* de S.

Suponhamos agora que Q tem a topologia co-induzida por $\varphi : X \to Q$. Então, dado $S \subset X$, o conjunto $\varphi(S)$ é aberto em Q se, e sòmente se, o seu saturamento $\varphi^{-1}[\varphi(S)]$ fôr aberto em X. A demonstração é óbvia mas o critério é útil.

Um caso freqüente de topologia co-induzida é o seguinte. X é um espaço topológico e E uma relação de equivalência em X. No conjunto $Q = X/E$, quociente de X pela relação E, consideramos a topologia co--induzida pela aplicação conônica $\varphi : X \to X/E$, que associa a cada $x \in X$ a classe de equivalência $\varphi(x)$ que o contém. Esta é a *topologia quociente* em X/E. O espaço topológico X/E é o *espaço quociente* de X pela relação de equivalência E. A aplicação φ chama-se *aplicação quociente* (ou *identificação*). Êste caso particular de topologia co-induzida é essencialmente o mais geral possível, como veremos agora.

Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ contínua, sôbre Y. Indiquemos com E a relação de equivalência definida em X pela aplicação f, isto é, xEx' se, e sòmente se, $f(x) = f(x')$. Consideremos a aplicação quociente $\varphi : X \to X/E$. Existe uma única aplicação $\bar{f} : X/E \to Y$ tal que $\bar{f}(\varphi(x)) = f(x)$. Como $\bar{f} \circ \varphi = f : X \to Y$ é contínua e X/E tem a topologia co-induzida por φ, segue-se que $\bar{f}$ é contínua. Além disso, $\bar{f}$ é evidentemente biunívoca e sôbre Y.

Nem sempre $\bar{f} : X/E \to Y$ é um homeomorfismo. Para que isso aconteça, é necessário e suficiente que a topologia de Y seja co-induzida por f.

Demonstração: É fácil ver que, para todo $C \subset X/E$, tem-se $\varphi^{-1}(C) = f^{-1}\bar{f}(C)$. Logo, C aberto em $X/E \Leftrightarrow \varphi^{-1}(C)$ aberto em $X \Leftrightarrow f^{-1}[\bar{f}(C)]$ aberto em $X \Leftrightarrow \bar{f}(C) \subset Y$ aberto na topologia co-induzida. A afirmação feita decorre imediatamente.

Para encerrar estas considerações, observaremos que, se $f : X \to Y$ fôr uma aplicação contínua e aberta de X sôbre Y, então a topologia de Y é co-induzida por f.

Com efeito, dado $B \subset Y$, se B fôr aberto então $f^{-1}(B)$ é aberto, pela continuidade de f. Recìprocamente, se $f^{-1}(B)$ fôr aberto em X então $f[f^{-1}(B)]$ é aberto em Y pois f é aberta. Mas $f[f^{-1}(B)] = B$ porque f é sôbre B. Logo, $B \subset Y$ é aberto se, e sòmente se, $f^{-1}(B)$ é aberto em Y.

Um caso particular de aplicação aberta é um *homeomorfismo local* $f : X \to Y$. Chama-se assim a uma aplicação f quando todo ponto $x \in X$ pertence a um aberto U tal que $f(U) = V$ é aberto em Y e f é um homeomorfismo de U sôbre V.

Note-se que, se f é um homeomorfismo do aberto $U \subset X$ sôbre o aberto $V \subset Y$ então, para cada aberto $U' \subset U$, $f(U')$ é aberto no subespaço V e por conseguinte é aberto em Y.

Para mostrar que todo homeomorfismo local $f : X \to Y$ é uma aplicação aberta, seja $A \subset X$ aberto. Para cada $x \in A$, existe um aberto

$U_x \subset X$ contendo x, tal que f aplica U_x homeomorfamente sôbre um aberto $V_x \subset Y$. Seja $U_x' = A \cap U_x$. Como observamos acima, $f(U_x')$ é aberto em Y. Segue-se que $A = \bigcup_{x \in A} U_x'$ e $f(A) = f(\bigcup_x U_x') = \bigcup_x f(U_x')$ é uma reunião de abertos em Y e portanto é aberto em Y.

Dada uma relação de equivalência E no espaço topológico X, a aplicação quociente $\varphi : X' \to X/E$ é aberta se, e sòmente se, o saturamento $\varphi^{-1}(\varphi(A))$ de todo subconjunto aberto $A \subset X$ fôr ainda aberto. Com efeito, $\varphi(A)$ é aberto em X/E se, e sòmente se, $\varphi^{-1}(\varphi(A))$ é aberto em X, pela própria definição da topologia de X/E.

Quando $\varphi : X \to X/E$ é aberta (isto é, quando o saturamento de todo aberto de X é ainda aberto em X) a relação de equivalência E diz-se uma *relação aberta.*

EXEMPLO

10. Consideremos, no conjunto R dos números reais, a relação de equivalência, indicada com $x \equiv y$ (mod. Z), que significa $x - y \in Z$ (isto é, a diferença entre os números reais x, y é um inteiro). Seja R/Z o espaço quociente. A aplicação quociente $\varphi : R \to R/Z$ é aberta. Com efeito, para cada aberto $A \subset R$, $\varphi^{-1}(\varphi(A))$ = saturamento de $A = \bigcup_{n \in Z} (A+n)$, onde indicamos com $A + n$ a imagem de A pela translação $\tau_n : x \to x + n$, a qual é um homeomorfismo $\tau_n : R \to R$. Assim, para cada n, $A + n$ é aberto em R donde $\varphi^{-1}(\varphi(A))$ é aberto. Observemos que, se $J_a = (a, a+1)$ é qualquer intervalo aberto de comprimento 1, então dois pontos distintos x, $y \in J_a$ não são equivalentes e portanto $\varphi : R \to R/Z$ aplica J_a (contínua e) biunìvocamente em R/Z. Como φ é aberta segue-se que φ é um homeomorfismo de J_a sôbre um subconjunto aberto de R/Z. Ora, todo ponto $x \in R$ pertence a algum intervalo aberto J_a. *Logo,* $\varphi : R \to R/Z$ *é um homeomorfismo local.*

Gostaríamos agora de identificar o espaço quociente R/Z com um objeto mais "concreto". Para tal, examinaremos a aplicação exponencial $\xi : R \to S^1$, definida por $\xi(t) = e^{2\pi i t} = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$. Lembremos que $S^1 = \{(x, y) \in R^2 ; x^2 + y^2 = 1\}$ é o círculo unitário do plano. Evidentemente, $\xi(t) = \xi(t')$ se, e sòmente se, $t - t' \in Z$, de modo que a relação de equivalência definida por ξ em R é a mesma considerada acima. Temos, portanto, a decomposição $\xi = \xi_1 \circ \varphi$, onde $\xi_1 : R/Z \to S^1$ é contínua, biunívoca e sôbre S^1.

$$R \xrightarrow{\ \xi\ } S^1, \qquad R \xrightarrow{\ \varphi\ } R/Z \xrightarrow{\ \xi_1\ } S^1$$

Queremos provar que $\xi_1 : R \to R/Z$ é um homeomorfismo. Daí resultará que o espaço quociente R/Z pode ser naturalmente identificado ao círculo S^1.

Inicialmente, mostraremos que a aplicação exponencial $\xi : R \to S^1$ é um homeomorfismo local.

+1

$\downarrow \xi$

N

-1 $+1$

$\cos 2\pi t$

t

n $n+1/2$

-1

Tomemos, por exemplo, um intervalo aberto da forma $(n, n + 1/2)$, $n \in Z$, e provemos que ξ o transforma homeomorfamente sôbre o semicírculo Norte $N = \{(x, y) \in S^1; y > 0\}$. Ora, a projeção $p_N : N \to (-1, 1)$, dada por $p_N(x, y) = x$, é um homeomorfismo, cujo inverso é $p_N^{-1}(x) = (x, \sqrt{1 - x^2})$. Também a aplicação composta $p_N \circ \xi : (n, n + 1/2) \to (-1, +1)$, dada por $t \to \cos 2\pi t$, é um homeomorfismo, como resulta das propriedades elementares do co-seno. Logo, $\xi = p_N^{-1} \circ (p_N \circ \xi)$ é um homeomorfismo de $(n, n + 1/2)$ sôbre o semicírculo aberto $N \subset S^1$. Considerando o semicírculo Sul $S = \{(x, y) \in S^1; y < 0\}$ e a projeção $p_S : S \to (-1, +1)$, definida por $p_S(x, y) = x$, com $p_S^{-1} : (-1, +1) \to S$ dada por $p_S^{-1}(x) = (x, -\sqrt{1 - x^2})$ veríamos que ξ aplica cada intervalo aberto da forma $(n - 1/2, n)$, $n \in Z$, homeomorfamente sôbre o semicírculo S, que é um aberto em S^1. Anàlogamente, os intervalos da forma $(n - 1/4, n + 1/4)$ e $(n + 1/4, n + 3/4)$ são transformados homeomorfamente por ξ nos semicírculos Leste e Oeste. Como os intervalos dêsses 4 tipos cobrem R, segue-se que $\xi : R \to S^1$ é um homeomorfismo local.

Em particular, $\xi : R \to S^1$ é uma aplicação aberta, donde S^1 tem a topologia co-induzida por ξ e portanto $\xi_1 : R/Z \to S^1$ é um homeomorfismo.

De um modo mais geral podemos considerar, no espaço euclidiano R^n, o subconjunto Z^n formado pelos vetores $\nu = (m_1, \ldots, m_n)$ cujas coordenadas $m_1, \ldots, m_n$ são inteiras. Dados $x, y \in R^n$, escrevamos $x \equiv y$ (mod. Z^n) para indicar que $x - y \in Z^n$. Obtemos assim uma relação de equivalência em R^n e o espaço quociente será indicado com R^n/Z^n. A aplicação quociente $\varphi : R^n \to R^n/Z^n$ é aberta. Com efeito, para cada $\nu \in Z^n$, a translação $x \to x + \nu$ é um homeomorfismo de R^n. Logo, se $A \subset R^n$ fôr aberto, o conjunto $A + \nu = \{a + \nu; a \in A\}$, imagem de A pela translação $x \to x + \nu$, é também aberto em R^n. Assim, o saturado $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = \bigcup_{\nu \in Z^n} (A + \nu)$ de um subconjunto aberto $A \subset R^n$ é ainda aberto, o que prova a afirmação feita.

Seja agora $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ o *toro n-dimensional*, produto cartesiano de n cópias do espaço métrico S^1. A aplicação $\xi_n : R^n \to R^n$ definida por $\xi_n(x^1, \ldots, x^n) = (\xi(x^1), \ldots, \xi(x^n))$ é um homeomorfismo local de R^n sôbre o toro T^n. Isto resulta imediatamente do corolário da Prop. 5 (vide § 2) e da propriedade de ser um homeomorfismo local. Tem-se um diagrama comutativo e, como anteriormente, a aplicação $\bar{\xi}_n$ é um homeomorfismo do espaço quociente R^n/Z^n sôbre o toro T^n.

Muitas vêzes, para introduzir uma topologia num conjunto X, não é preciso descrever todos os abertos de X mas apenas os abertos "básicos" de acôrdo com a definição abaixo.

Uma *base de abertos* ou, simplesmente, uma *base* num espaço topológico X é uma coleção $\mathfrak{B}$ de subconjuntos abertos de X, chamados *abertos básicos*, com a seguinte propriedade:

Todo subconjunto aberto $A \subset X$ se exprime como reunião $A = \bigcup B_\lambda$ de abertos B_λ pertencentes a $\mathfrak{B}$.

Por exemplo, as bolas abertas constituem uma base para a topologia de um espaço métrico M. Outra base de M é formada pelas bolas abertas de raio racional em M. Com efeito, tôda bola aberta $B(x; \epsilon)$ é reunião das bolas abertas de raio racional $r < \epsilon : B(x; \epsilon) = \bigcup_{r < \epsilon} B(x; r)$. Logo, todo aberto de M, sendo reunião de bolas, $B(x; \epsilon)$, será também reunião de bolas $B(x; r)$, r racional.

Dadas métricas equivalentes d e d' no mesmo espaço M, as bolas abertas segundo d e as bolas abertas segundo d' constituem duas bases $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ para a topologia de M.

Proposição 9 — *Seja X um espaço topológico. Uma coleção $\mathfrak{B}$ de abertos de X constitui uma base em X se, e sòmente se, para cada aberto $A \subset X$ e cada ponto $x \in A$ existe um conjunto $B_x \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B_x \subset A$.*

Demonstração: $x \in B_x \subset A$ significa $\{x\} \subset B_x \subset A$ e portanto $A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} B_x \subset A$, donde $A = \bigcup B_x$. Assim, se a condição é satisfeita, todo aberto $A \subset X$ é reunião de elementos de $\mathfrak{B}$ e por conseguinte $\mathfrak{B}$ é uma base. Recìprocamente, se todo aberto $A \subset X$ se escreve como $A = \bigcup B_\lambda$, $B_\lambda \in \mathfrak{B}$, dado $x \in A$ existe algum λ tal que $x \in B_\lambda \subset A$. Ponha $B_x = B_\lambda$.

Resulta da proposição acima, que em todo espaço métrico M, as bolas abertas de raio $1/n$, n inteiro positivo, constituem uma base para a topologia de M.

Proposição 10 — *Seja* $\mathfrak{B}$ *uma coleção de subconjuntos de um conjunto* X. *Para que* $\mathfrak{B}$ *seja base de uma topologia em* X *é necessário e suficiente que se cumpram as condições abaixo:*

1) *para cada* $x \in X$, *existe* $B \in \mathfrak{B}$ *tal que* $x \in B$,

2) *se* $x \in B_1 \cap B_2$, *onde* $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$, *então existe* $B \in \mathfrak{B}$ *tal que* $x \in B \subset \subset B_1 \cap B_2$. (*Esta condição é cumprida, em particular, quando* $B_1 \cap B_2 \in \mathfrak{B}$.)

Demonstração: Seja $\mathfrak{B}$ uma coleção com as propriedades acima. Consideremos a coleção τ de tôdas as partes $A = \bigcup B_\lambda$ de X, que se exprimem como uma reunião de conjuntos $B_\lambda \in \mathfrak{B}$, e mais o conjunto vazio $\varnothing$. Em virtude de 1), a reunião de todos os $B \in \mathfrak{B}$ é X, logo, $X \in \tau$. Pela própria definição de τ, é claro que a reunião de uma família qualquer de elementos de τ ainda pertence a τ. Finalmente, se $A = \bigcup B_\lambda$ e $A' = \bigcup B_\mu$ pertencem a τ, então $A \cap A' = \bigcup (B_\lambda \cap B_\mu)$. Ora, a propriedade 2) diz que cada $B_\lambda \cap B_\mu$ é reunião de conjuntos pertencentes a $\mathfrak{B}$. Logo, $A \cap A'$ é reunião de conjuntos pertencentes a $\mathfrak{B}$. Assim, verifica-se que τ é uma topologia em X, que admite $\mathfrak{B}$ como base. A recíproca é deixada como exercício.

Um exemplo importante de topologia definida por uma base é o seguinte:

Topologia produto — Sejam $X_1, \ldots, X_n$ espaços topológicos. No conjunto $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, produto cartesiano dos X_i, consideremos a coleção $\mathfrak{B}$, formada pelos "abertos elementares" $A = A_1 \times \ldots \times A_n$, onde $A_1 \subset X_1, \ldots, A_n \subset X_n$ são abertos. Como $(A_1 \times \ldots \times A_n) \cap (B_1 \times \times \ldots \times B_n) = (A_1 \cap B_1) \times \ldots \times (A_n \cap B_n)$, segue-se da Prop. 10 que $\mathfrak{B}$ é base de uma topologia em X, chamada a topologia produto. Normalmente, ao considerar o conjunto $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ como espaço topológico, é a *topologia produto* que se toma em X.

Um aberto da topologia produto é portanto uma reunião de abertos elementares.

Proposição 11 — *A topologia produto em* $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ *tem as seguintes propriedades*:

a) *As projeções* $p_i : X \to X_i$ *são contínuas e abertas.*

b) *Dado um espaço topológico* Z, *uma aplicação* $f : Z \to X$, *com* $f(z) = = (f_1(z), \ldots, f_n(z))$, *é contínua num ponto* $b \in Z$ *se, e sòmente se, cada coordenada* $f_i = p_i \circ f : Z \to X_i$ *é contínua no ponto* b.

c) *Se* $X_1, \ldots, X_n$ *são metrizáveis,* X *é metrizável e sua topologia pode ser definida por qualquer das 3 métricas usuais num produto.*

Demonstração: *a*) Se $A \subset X_i$ é aberto então $p_i^{-1}(A) = X_1 \times \ldots \times \times X_{i-1} \times A \times X_{i+1} \times \ldots \times X_n$ é aberto em X, logo p_i é contínua. Se

$U = A_1 \times \ldots \times A_n$ é um aberto elementar em X então $p_i(U) = A_i$ é aberto em X_i. Ora, todo aberto A em X é uma reunião $A = \bigcup U_\lambda$ de abertos elementares, logo, $p_i(A) = \bigcup_\lambda p_i(U_\lambda)$ é aberto em X_i.

b) Se f é contínua num ponto $b \in Z$ então cada $f_i = p_i \circ f$ é contínua em b, em virtude da primeira parte. Reciprocamente, se cada f_i é contínua no ponto b, seja V um aberto arbitrário em X com $f(b) = (f_1(b), \ldots, f_n(b)) \in V$. Pela definição da topologia produto, existem abertos $A_i \subset X_i$ tais que $f(b) \in A_1 \times \ldots \times A_n \subset V$, isto é, $f_1(b) \in A_1, \ldots, f_n(b) \in A_n$. Pela continuidade das aplicações $f_1, \ldots, f_n$ existe, para cada i, um aberto B_i em Z, com $b_i \in B_i$ e $f_i(B_i) \subset A_i$. Assim, $B = B_1 \cap \ldots \cap B_n$ é um aberto em Z, com $b \in B$ e $f_1(B) \subset A_1, \ldots, f_n(B) \subset A_n$, donde $f(B) \subset f_1(B_1) \times \ldots \times f_n(B_n) \subset A_1 \times \ldots \times A_n \subset V$, como queríamos demonstrar.

c) Observamos inicialmente que, em geral, se $\mathfrak{B}_i$ é uma base em X_i, $i = 1, \ldots, n$ então os abertos elementares da forma $B_1 \times \ldots \times B_n$ com $B_i \in \mathfrak{B}_i$ ainda formam uma base da topologia produto em X. Para cada $i = 1, \ldots, n$, seja d_i uma métrica que define a topologia de X_i. Tomando em X a métrica $d(x, y) = \text{máx.}\ \{d_i(x_i, y_i)\}$ as bolas abertas de X coincidem com os abertos elementares $B_1 \times \ldots \times B_n$, onde cada B_i é uma bola aberta em X_i. Segue-se que d define a topologia produto em X.

§ 4. Interior, Fronteira e Vizinhança

Seja S um subconjunto de um espaço topológico X. Um ponto $x \in S$ chama-se um *ponto interior* de S quando existe um aberto A de X tal que $x \in A \subset S$.

O *interior* de S é o conjunto int.(S) formado pelos pontos interiores de S.

PROPOSIÇÃO 12 — *O interior de um conjunto S, num espaço topológico X, é a reunião de todos os subconjuntos abertos de X que estão contidos em S. Em particular, int.(S) é aberto em X.*

Demonstração: Seja $A = \bigcup A_\lambda$ a reunião de todos os abertos $A_\lambda \subset S$. Então, A é aberto em X e $A \subset S$, logo, $x \in A$ implica $x \in$ int.(S). Assim, $A \subset$ int.(S). Reciprocamente, se $x \in$ int.(S) existe um aberto A' em X tal que $x \in A' \subset S$. Logo, $A' = A_\lambda$ para algum λ e portanto $A' \subset A$. Isto mostra que $x \in A$, donde int.$(S) \subset A$. C. Q. D.

A proposição acima significa que int.(S) é o maior subconjunto aberto de X contido em S.

Num espaço métrico M, um ponto x pertence ao interior de um subconjunto S se, e sòmente se, existe uma bola aberta $B(x; r)$, de centro x, inteiramente contida em S.

Corolário — *S é aberto se, e sòmente se, $S = int.(S)$.*

EXEMPLOS

11. Um (conjunto reduzido a um) ponto $x \in X$ tem interior não vazio se, e sòmente se, x é um ponto isolado. Todo subconjunto finito do espaço euclidiano R^n tem interior vazio. O conjunto dos números racionais da reta (e também o conjunto dos números irracionais) tem interior vazio.

12. Todo subespaço vetorial L de um espaço vetorial normado E, com $L \neq E$, tem interior vazio. No espaço euclidiano R^n, o interior de uma bola fechada $D(a; r)$ é a bola aberta $B(a; r)$ de mesmo centro e mesmo raio. Num espaço métrico arbitrário, pode-se afirmar apenas que $B(a; r) \subset \subset \text{int.}(D(a; r))$. No espaço $M = \{(x, y) \in R^2 ; y \leq 1\}$, o ponto $p = (0, 1)$ é interior ao quadrado $\{(x, y) \in M; |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ mas não é interior ao disco $\{(x, y) \in M; x^2 + y^2 \leq 1\}$. Se $f : X \to R$ é contínua e $f(x_0) > 0$ então x_0 é um ponto interior ao conjunto $\{x \in X; f(x) \geq 0\}$.

Num espaço topológico X, diz-se que um conjunto V é uma *vizinhança* de um ponto $x \in X$ quando $x \in \text{int.}(V)$. Isto quer dizer, naturalmente, que V contém um aberto que contém x.

A seguinte proposição decorre imediatamente das definições:

Proposição 13 — *a) Um conjunto A é aberto num espaço topológico X se, e sòmente se, é uma vizinhança de cada um dos seus pontos.*

b) Sejam X, Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e sòmente se, para cada vizinhança V do ponto $f(a)$ em Y existe uma vizinhança U do ponto a em X tal que $f(U) \subset V$.

A *fronteira* de um subconjunto S de um espaço topológico X é o conjunto fr.(S) formado por todos os pontos $x \in X$ tais que tôda vizinhança de x contém pontos de S e do complementar $X - S$.

Em outras palavras, para que $x \in \text{fr.}(S)$ é necessário e suficiente que x não pertença nem ao interior de S nem ao interior de $X - S$.

Num espaço métrico M, $x \in \text{fr.}(S)$ se, e sòmente se, para cada $\epsilon > 0$ existe um ponto $s \in S$ e um ponto $t \in M - S$ tais que $d(s, x) < \epsilon$ e $d(t, x) < \epsilon$.

EXEMPLOS

13. Se int.$(S) = \emptyset$, então, $S \subset$ fr.(S). Todo ponto de S que não pertence a int.(S) pertence a fr.(S). Um conjunto S é aberto se, e sòmente se, $S \cap$ fr.$(S) = \emptyset$. No espaço R^n, a fronteira de uma bola (aberta ou fechada) de centro a e raio r é a esfera $S(a, r)$. A fronteira do conjunto Q dos números racionais é tôda a reta R. Em geral, alguns pontos da fronteira de S pertencem a S, outros não; por exemplo, se $S = \{(x, y) \in R^2; x^2 + y^2 \leq 1, y > 0\}$ a fronteira de S no plano consiste do semicírculo $x^2 + y^2 = 1$, $y > 0$ e mais o segmento $-1 \leq x \leq 1$, $y = 0$. O semicírculo está contido em S, o segmento não.

Observação — Assim como a noção de conjunto aberto, os conceitos de *interior* e de *fronteira* de um conjunto são *relativos*, isto é, se $S \subset X$ e o espaço X é subespaço de um espaço topológico maior Y, o interior de S em X e a fronteira de S em X não coincidem com o interior e a fronteira de S em Y. Por exemplo, seja $S = [a, b]$ um intervalo fechado da reta R. O interior de $[a, b]$ na reta é o intervalo aberto (a, b) e a sua fronteira é o conjunto $\{a, b\}$ formado pelos dois pontos extremos. Considerando, entretanto, R como o eixo das abscissas do plano R^2, o interior de $[a, b]$ em R^2 é vazio e sua fronteira é (portanto) o próprio intervalo $[a, b]$. Êste exemplo mostra também que (usando uma notação evidente) se $S \subset X \subset Y$, *não é verdade* que int.$_X(S) = X \cap$ int.$_Y(S)$ nem que fr.$_X(S) = X \cap$ fr.$_Y(S)$. Quanto ao conceito de vizinhança, êle também é relativo, mas vale a seguinte

Proposição 14 — *Sejam Y um espaço topológico, X um subespaço de X, e x um ponto de X. As vizinhanças de x em X são as interseções $V \cap X$, onde V é uma vizinhança de x em Y.*

Demonstração: Sabemos que os subconjuntos abertos de X são as interseções $A \cap X$, onde A é aberto em Y. Se V é uma vizinhança de x em Y, então existe A aberto em Y com $x \in A \subset V$ e portanto $x \in A \cap \cap X \subset V \cap X$ e portanto $V \cap X$ é uma vizinhança de x em X. Recìprocamente, se U é uma vizinhança de x em X então existe A aberto em Y tal que $x \in A \cap X \subset U$. Seja $V = A \cup U$. Então, claramente, V é uma vizinhança de x em Y. Além disso, $V \cap X = (A \cup U) \cap X = (A \cap X) \cup (U \cap X) = (A \cap X) \cup U = U$, logo, $U = V \cap X$ é da forma desejada.

§ 5. Conjuntos Fechados

Um subconjunto F de um espaço topológico X diz-se *fechado* quando o seu complementar $X - F$ é aberto.

A fim de que F seja um subconjunto fechado de X, é necessário e suficiente que, para cada ponto $x \in X - F$ exista um aberto U_x, com $x \in U_x \subset \subset X - F$, isto é, $x \in U_x$ e $U_x \cap F = \emptyset$.

Com efeito, esta propriedade significa que $X - F = \bigcup U_x, x \in X - F$, é uma reunião de abertos, logo, $X - F$ é um conjunto aberto. (Prop. 2 da definição de conjunto aberto.)

Proposição 15 — *Os subconjuntos fechados de um espaço topológico X gozam das seguintes propriedades:*

1) *o conjunto vazio $\emptyset$ e o espaço inteiro X são fechados;*

2) *a interseção $F = \bigcap F_\lambda$ de uma família qualquer $(F_\lambda)_{\lambda \in \text{A}}$ (finita ou infinita) de subconjuntos fechados $F_\lambda \subset X$ é um subconjunto fechado de X;*

3) *a reunião $F = F_1 \cup \ldots \cup F_n$ de um número finito de subconjuntos fechados $F_1, \ldots, F_n \subset X$ é um subconjunto fechado de X.*

Demonstração: Usa-se sistemàticamente a Prop. 3.

1) X e $\emptyset$ são complementares dos conjuntos abertos $\emptyset$ e X, respectivamente, logo são fechados.

2) Seja $A_\lambda = X - F_\lambda$. Cada A_λ é aberto em X, logo, $A = \bigcup A_\lambda$ é também aberto. Como $F = \bigcap F_\lambda = \bigcap (X - A_\lambda) = X - \bigcup A_\lambda = X - A$, segue-se que F é fechado.

3) Novamente, os conjuntos $A_1 = X - F_1, \ldots, A_n = X - F_n$ são abertos.

Logo, $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ é aberto e $F_1 \cup \ldots \cup F_n = (X - A_1) \cup \ldots \cup \cup (X - A_n) = X - (A_1 \cap \ldots \cap A_n)$ é fechado.

Proposição 16 — *Sejam X e Y espaços topológicos. Para que uma aplicação $f : X \to Y$ seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa $f^{-1}(F')$ de todo subconjunto fechado $F' \subset Y$ seja um subconjunto fechado em X.*

Demonstração: Seja $f : X \to Y$ contínua. Dado $F' \subset Y$ fechado, $Y - F'$ é aberto. Pela prop. 5, $f^{-1}(Y - F') = X - f^{-1}(F')$ é aberto e portanto $f^{-1}(F')$ é fechado em X. Recìprocamente, se a imagem inversa de cada fechado em Y é um fechado em X, dado um aberto $A' \subset Y$, $f^{-1}(Y - A') = X - f^{-1}(A')$ é fechado em X, donde $f^{-1}(A')$ é aberto e, pela Prop. 5, f é contínua.

COROLÁRIO — *Seja $f : X \to Y$ biunívoca de X sôbre Y. A fim de que f seja um homeomorfismo, é necessário e suficiente que a seguinte condição seja satisfeita: dado $P \subset X$, $f(P)$ é fechado em Y se, e sòmente se, P é fechado em X.*

EXEMPLOS

14. Os intervalos fechados $(-\infty, a] = R - (a, +\infty)$, $[b, +\infty) = R - (-\infty, b)$ e $[a, b] = R - [(-\infty, a) \cup (b, +\infty)]$ são subconjuntos fechados da reta, pois são complementares de conjuntos abertos.

15. Tôda bola fechada $D(a; r)$ num espaço métrico M é um subconjunto fechado de M. Isto pode ser verificado diretamente, mostrando-se que $\{x \in M; d(x, a) > r\}$ é aberto em M, mas é também uma conseqüência da Prop. 16 acima. Com efeito, a função real $f : M \to R$, definida por $f(x) = d(x, a)$, é contínua e $D(a; r) \equiv f^{-1}([0, r])$. Como $[0, r]$ é um subconjunto fechado da reta, sua imagem inversa $D(a; r)$ é fechada em M.

16. Num espaço de Hausdorff X, todo ponto x é um subconjunto fechado de X. Com efeito, para cada $y \in X - x$, existem abertos A_y, B_y tais que $x \in A_y$, $y \in B_y$, $A_y \cap B_y = \varnothing$. Em particular, $y \in B_y \subset X - x$ e portanto x é fechado em X. Segue-se que todo subconjunto finito $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ é fechado. A recíproca é falsa: o espaço topológico definido no Ex. 8 não é de Hausdorff, mas seus pontos são subconjuntos fechados. Note-se o caso particular dos espaços métricos: todo ponto de um espaço métrico M é um subconjunto fechado de M, pois M é um espaço de Hausdorff.

17. Na linguagem corrente, as palavras *aberto* e *fechado* exprimem idéias mùtuamente contraditórias. Mas, num espaço topológico X, um subconjunto pode ser simultâneamente aberto e fechado como, por exemplo, o espaço inteiro X e o conjunto vazio $\varnothing$. Também, no caso extremo de um espaço discreto X, todo subconjunto de X é aberto e fechado. Um exemplo menos trivial é o seguinte. Seja $M = R - \{0\}$ o conjunto dos números reais diferentes de zero, com a métrica induzida da reta. Então, $M = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Cada um dêstes dois intervalos é evidentemente aberto em M. Por outro lado, cada um dêles também é fechado, porque tem o outro (um conjunto aberto) como complementar em M.

18. Uma reunião infinita de subconjuntos fechados de um espaço topológico X não é necessàriamente um subconjunto fechado de X. Isto resulta, por passagem ao complementar, do fato de que a interseção de uma família infinita de abertos pode não ser um aberto. Observamos ainda que qualquer subconjunto de um espaço de Hausdorff é reunião de uma família

de fechados (a saber: seus pontos), mas êsse conjunto pode não ser fechado como, por exemplo, o conjunto Q dos números racionais na reta R.

19. Uma aplicação $f : X \to Y$ (X, Y espaços topológicos) diz-se *fechada* quando a imagem $f(F)$ de todo subconjunto fechado $F \subset X$ fôr um subconjunto fechado de Y. Uma aplicação biunívoca $f : X \to Y$ é um homeomorfismo se, e sòmente se, é contínua e fechada. A existência de aplicações fechadas não-contínuas e contínuas não-fechadas é assegurada pelo fato de que há aplicações contínuas e biunívocas de X sôbre Y que não são homeomorfismos. Um exemplo notável, de um tipo de aplicação contínua que é aberta mas não fechada, é dado pelas projeções $p_i : X_1 \times \ldots \times X_n \to X_i$, de um produto cartesiano em um dos seus fatôres. Consideremos, por exemplo, a projeção $p_1 : R^2 \to R$, $p_1(x, y) = x$. A hipérbole $F = \{(x, y) \in R^2; xy = 1\}$ é um subconjunto fechado do plano, pois é a imagem inversa $F = m^{-1}(1)$ do ponto $1 \in R$ pela aplicação contínua $m : R^2 \to R$, $m(x, y) = x \cdot y$ (Cap. II, Prop. 2, Corol. 1). Entretanto, $p_1(F) = R - \{0\}$ não é um subconjunto fechado da reta.

20. Sejam X, Y espaços topológicos, Y um espaço de Hausdorff. O gráfico de uma aplicação contínua $f : X \to Y$ é um subconjunto fechado $G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y; x \in X\}$ do espaço produto $X \times Y$. Com efeito, se $(x_0, y_0) \in X \times Y - G(f)$ então $y_0 \neq f(x_0)$. Como Y é um espaço de Hausdorff, existem abertos V, W em Y, com $y_0 \in V$, $f(x_0) \in W$ e $V \cap W = \emptyset$. Sendo f contínua, existe um aberto U em X, com $x_0 \in U$ e $f(U) \subset W$. Logo, $f(U) \cap V = \emptyset$, isto é, se $x \in U$ então $f(x) \notin V$. Portanto, $U \times V$ é um aberto em $X \times Y$, contendo (x_0, y_0) e sem pontos em comum com $G(f)$. Isto prova que $G(f)$ é fechado. Em particular, a diagonal $\Delta = \{(x, x); x \in Y\}$ é um subconjunto fechado do produto $Y \times Y$ pois é o gráfico da aplicação identidade $Y \to Y$.

21. Seja $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família arbitrária (finita ou não) de funções reais contínuas $f_\alpha : X \to R$, definidas num espaço topológico X. O conjunto dos pontos $x \in X$ tais que $f(x) \leq 0$ para todo $\alpha \in A$ é um subconjunto fechado de X. Com efeito, tal conjunto é igual à interseção $\bigcap_\alpha f_\alpha^{-1}((-\infty, 0])$ dos conjuntos fechados $f_\alpha^{-1}((-\infty, 0])$, cada um dos quais é a imagem inversa do conjunto fechado $(-\infty, 0]$ da reta, pela função contínua f_α. O mesmo resultado vale com $\geq$ ou $=$ em lugar de $\leq$, ou com qualquer combinação dos 3 sinais.

22. Sejam $F_1 \subset X_1, \ldots, F_n \subset X_n$ subconjuntos fechados. Então, $F_1 \times \ldots \times F_n$ é um subconjunto fechado do produto $X_1 \times \ldots \times X_n$. Com efeito, $F_1 \times \ldots \times F_n = p_1^{-1}(F_1) \cap \ldots \cap p_n^{-1}(F_n)$ e cada projeção $p_i : X_1 \times \ldots \times X_n \to X_i$ é contínua.

As Props. 15 e 16 sugerem que se defina uma topologia num conjunto X como sendo uma coleção $\mathfrak{F}$ de partes de X, chamadas os *subconjuntos fechados* de X, de tal modo que $\varnothing$, $X \in \mathfrak{F}$, uma interseção qualquer e uma reunião finita de partes em $\mathfrak{F}$ pertençam ainda a $\mathfrak{F}$. Então, uma aplicação $f : X \to Y$ será chamada *contínua* quando, para cada subconjunto fechado $F \subset Y$, sua imagem inversa $f^{-1}(F)$ fôr um fechado de X. Êste método de definir um espaço topológico é inteiramente equivalente ao que foi adotado no texto: dada a coleção $\mathfrak{F}$, os complementares $A = X - F$ dos conjuntos $F \in \mathfrak{F}$ constituem uma topologia no sentido do § 3 e vice-versa.

EXEMPLOS

23. Seja X um subespaço do espaço topológico Y. Os subconjuntos fechados de X são as interseções $F \cap X$ dos subconjuntos fechados $F \subset Y$ com o subespaço X. Com efeito, como a inclusão $i : X \to Y$ é uma aplicação contínua, para cada fechado $F \subset Y$, $i^{-1}(F)$ deve ser fechado em X. Mas $i^{-1}(F) = F \cap X$, logo os conjuntos $F \cap X$ são todos fechados em X. É fácil ver, porém, que tais conjuntos cumprem as condições acima mencionadas para que sejam fechados de uma topologia em X. Como a topologia induzida por Y em X deve ser a menos fina que torna i contínua, concluímos que ela tem por fechados os conjuntos $F \cap X$, $F \subset Y$ fechado, e nenhum outro. Em particular, se X fôr fechado em Y, então um subconjunto $F \subset Y$ é fechado em X se, e sòmente se, F é fechado em Y.

24. Sejam X, Y espaços topológicos, $F_1, \ldots, F_n$ subconjuntos fechados de X tais que $X = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n$ e $f : X \to Y$ uma aplicação tal que as restrições $f_i = f | F_i : F_i \to Y$ são tôdas contínuas ($i = 1, \ldots, n$). Então, $f : X \to Y$ é contínua. Com efeito, dado $F \subset Y$ fechado, temos $f^{-1}(F) = f_1^{-1}(F) \cup \ldots \cup f_n^{-1}(F)$. Ora, pela Prop. 16, cada $f_i^{-1}(F)$ é fechado em F_i e portanto fechado em F. Assim, $f^{-1}(F)$ é fechado em X e, ainda pela Prop. 16, segue-se que f é contínua.

Esta observação é de grande utilidade para a definição de aplicações contínuas por meio de diferentes construções, cada uma delas efetuada numa parte fechada. Por exemplo, dados um espaço topológico X e duas aplicações contínuas $f : [0, a] \to X$, $g : [a, 1] \to X$, tais que $f(a) = g(a)$, onde $0 < a < 1$, a aplicação $h : [0, 1] \to X$, definida por $h(t) = f(t)$, para $0 \leq t \leq a$ e $h(t) = g(t)$, para $a \leq t \leq 1$ é contínua.

Proposição 17 — *Sejam X um espaço topológico e M um espaço métrico. Dada $f : X \to M$, as aplicações que estão a uma distância finita de f e são contínuas num dado ponto $a \in X$ formam um subconjunto fechado do espaço $\mathfrak{B}_f(X; M)$.*

Demonstração: Observar primeiro que a Prop. 2 vale para aplicações definidas num espaço topológico; basta substituir, na demonstração, tôda

"bola B de centro a" por "vizinhança V de a". Segue-se a Prop. 17 desta observação e da definição de conjunto fechado.

Corolário — *As aplicações contínuas formam um subconjunto fechado de $\mathfrak{B}_f(X; M)$. Em particular, as aplicações contínuas limitadas formam um subconjunto fechado de $\mathfrak{B}(X; M)$.*

Indicam-se com $\mathfrak{C}_f(X; M) \subset \mathfrak{B}_f(X; M)$ e $\mathfrak{C}_0(X; M) \subset \mathfrak{B}(X; M)$ os subespaços dêsses espaços, formados pelas aplicações contínuas (X é um espaço topológico e M um espaço métrico).

Seja S um subconjunto de um espaço topológico X. Um ponto $x \in X$ diz-se *aderente* a S quando tôda vizinhança de x em X contém pelo menos um ponto de S. O conjunto dos pontos de X que são aderentes a S chama-se o *fecho* de S e indica-se com a notação $\bar{S}$. Assim, $x \in \bar{S}$ se, e sòmente se, para todo aberto A do espaço X, $x \in A$ implica $A \cap S \neq \emptyset$.

Evidentemente, $S \subset \bar{S}$ qualquer que seja $S \subset X$.

Proposição 18 — *O fecho de um subconjunto S num espaço topológico X é a interseção de todos os subconjuntos fechados de X que contêm S.*

Demonstração: Seja $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ a família de todos os fechados de X que contêm S. Então, $A_\lambda = X - F_\lambda$, $\lambda \in L$, são todos os abertos de X contidos em $X - S$. A definição de ponto aderente significa que $x \in \bar{S}$ se, e sòmente se, $x \notin \text{int.}(X - S)$. Ora, $\text{int.}(X - S) = \bigcup A_\lambda$. Logo,

$$\bar{S} = X - \text{int.}(X - S) = X - \bigcup A_\lambda = \bigcap (X - A_\lambda) = \bigcap F_\lambda$$

como devíamos demonstrar.

Corolário 1 — *$F \subset X$ é fechado se, e sòmente se, $F = \bar{F}$.*

Com efeito, o fecho de qualquer conjunto é um subconjunto fechado por ser uma interseção de fechados. Logo, se $F = \bar{F}$, F é fechado. Recìprocamente, se F é fechado, então F pertence à família dos fechados de X que contêm F e, por conseguinte, a interseção dessa família é F, isto é, $F = \bar{F}$.

Corolário 2 — *O fecho de um conjunto S num espaço topológico X é o menor subconjunto fechado de X que contém S. Mais precisamente*:

1) *$\bar{S}$ é fechado em X;*

2) *$\bar{S} \supset S$;*

3) *se F é um subconjunto fechado de X que contém S, então, $F \supset \bar{S}$.*

Basta demonstrar a terceira afirmação. Ora, se F é fechado e $F \supset S$, então F é um dos F_λ e, portanto, F contém a interseção dos F_λ, isto é, $F \supset \bar{S}$.

Observação — As 3 propriedades expressas no Corol. 2 caracterizam o fecho $\bar{S}$ pois significam que $\bar{S}$ é o menor elemento do conjunto (parcialmente ordenado por inclusão) das partes fechadas de X que contêm S.

COROLÁRIO 3 — *Seja X um subespaço do espaço topológico Y. O fecho (relativamente a X) de um subconjunto $S \subset X$ é a interseção de X com o fecho de S em Y.*

Com efeito, seja $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ a família dos subconjuntos fechados de Y que contém S. Então (vide Ex. 24), a família dos subconjuntos fechados de X que contém S é $(F_\lambda \cap X)_{\lambda \in L}$. O fecho de S em X é portanto igual a $\bigcap_\lambda (F_\lambda \cap X) = (\bigcap F_\lambda) \cap X$, o que demonstra o corolário.

PROPOSIÇÃO 19 — *Seja S um subconjunto de um espaço métrico M. Então, $x \in \overline{S}$ se, e sòmente se, $d(x, S) = 0$.*

Demonstração: No espaço métrico M, um ponto x pertence ao fecho de S se, e sòmente se, tôda bola aberta de centro x contém algum ponto de S. Ou seja, $x \in \overline{S}$ se, e sòmente se, para cada $\epsilon > 0$ existe $y \in S$ com $d(x, y) < \epsilon$. Esta última condição, porém, significa que $d(x, S) = \inf.\{d(x, y); y \in S\} = 0$.

COROLÁRIO — *Para que um subconjunto F de um espaço métrico seja fechado, é necessário e suficiente que $d(x, F) = 0$ implique $x \in F$.*

Com efeito, se F é fechado e $d(x, F) = 0$ então, pela Prop. 19, $x \in \overline{F}$, ou seja, $x \in F$. Recìprocamente, se a condição é satisfeita, dado $x \in \overline{F}$, temos $d(x, F) = 0$ pela Prop. 19, e, pela condição admitida, isto implica $x \in F$. Logo, $\overline{F} \subset F$ e portanto F é fechado.

PROPOSIÇÃO 20 — *Dados dois subconjuntos fechados disjuntos F, G num espaço métrico M, existe uma função real contínua $\varphi : M \to [0, 1]$ tal que $\varphi(x) = 0$ se $x \in F$ e $\varphi(x) = 1$ se $x \in G$.*

Demonstração: A proposição é óbvia se algum dos dois conjuntos é vazio. No caso contrário, basta definir

$$\varphi(x) = \frac{d(x, F)}{d(x, F) + d(x, G)} .$$

COROLÁRIO — *Sejam F, G subconjuntos fechados disjuntos num espaço métrico M. Existem abertos U, V em M tais que $F \subset U$, $G \subset V$ e $U \cap V = \varnothing$.*

Com efeito, basta tomar a função φ definida na proposição acima e pôr: $U = \{x \in M; \varphi(x) < 1/2\}$, $V = \{x \in M ; \varphi(x) > 1/2\}$.

OBSERVAÇÃO — Dados F, G fechadas num espaço métrico M, podemos ter $d(F, G) = 0$, mesmo com $F \cap G = \varnothing$. Por exemplo, isso ocorre no plano F = eixo das abscissas e G = ramo de hipérbole $y = 1/x$,

$x > 0$. É interessante imaginar como poderão ser os conjuntos abertos, disjuntos U, V neste caso.

Um espaço topológico X chama-se *normal* quando dados fechados F, $G \subset X$, com $F \cap G = \varnothing$, existem abertos U, $V \subset X$ com $F \subset U$, $G \subset V$ e $U \cap V = \varnothing$. (Alguns autores exigem, além disso, que X seja um espaço de Hausdorff.) O Corolário acima exprime que todo espaço topológico metrizável é um espaço normal. Um dos teoremas mais belos e mais importantes da Topologia Geral, devido a P. Urysohn, afirma que em todo espaço normal X, dados dois fechados disjuntos F, G, existe sempre uma função real contínua $\varphi : X \to [0, 1]$ tal que $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in F$ e $\varphi(x) = 1$ para todo $x \in G$. Êste teorema é notável, e mesmo surpreendente, não sòmente por suas diversas aplicações, como também porque na definição de um espaço normal nada intervém que faça lembrar os números reais e no entanto existem inúmeras funções reais contínuas nêle definidas. (Vide § 5 do Cap. VIII.)

Sejam F, G subconjuntos fechados disjuntos num espaço topológico X. Uma função contínua $\varphi: X \to [0, 1]$ com $\varphi(F) = 0$, $\varphi(G) = 1$ chama-se uma *função de Urysohn* do par (F, G).

EXEMPLOS

25. Num espaço discreto, $\overline{S} = S$ para todo subconjunto S, pois todo subconjunto é fechado. Na reta, se Q é o conjunto dos números racionais, temos $\overline{Q} = R$ pois em todo intervalo da reta (isto é, em qualquer vizinhança de um número real) existem números racionais. Ainda em R, o fecho de um intervalo aberto (a, b) é o intervalo fechado $[a, b]$. Mais geralmente, no espaço R^n (bem como em qualquer espaço vetorial normado), o fecho de uma bola aberta $B(a; r)$ é a bola fechada $D(a; r)$, de mesmo centro e mesmo raio. Para verificar êste fato basta, como de costume, considerar as bolas $B = B(0; r)$ e $D(0; r)$, de centro na origem $0 \in R^n$. D é um subconjunto fechado de R^n contendo B, logo, $\overline{B} \subset D$. Para mostrar que, recìprocamente, $D \subset \overline{B}$, basta mostrar que a esfera $S = S(0; r)$ está contida em $\overline{B}$ pois $D = B \cup S$. Seja então $x \in S$, isto é, $|x| = r$. Qualquer que seja a bola $B(x; \epsilon)$, o ponto $y = \left(1 - \dfrac{\epsilon}{2r}\right) x$ é tal que $x - y = \dfrac{\epsilon}{2r}\, x$, logo, $|x - y| = \epsilon/2 < \epsilon$ e portanto $y \in B(x; \epsilon)$. Além disso, $|y| = r - \epsilon/2$ e por conseguinte $y \in B$. Assim, tôda bola com centro num ponto $x \in S$ tem algum ponto em comum com B, donde $S \subset B'$. Isto conclui a demonstração de que $\overline{B} = D$.

26. Num espaço métrico qualquer M, não é sempre verdade que o fecho de uma bola aberta $B(a; r)$ seja a bola fechada $D(a; r)$. Tem-se

sempre $D \supset \overline{B}$. Mas no espaço discreto em que $d(x, y) = 1$ para $x \neq y$, tôda bola aberta de raio 1 reduz-se ao seu ponto central e é, portanto, igual a seu fecho, mas qualquer bola fechada de raio 1 é o espaço todo. Outro exemplo é o seguinte: seja $M = R^2 - A$, onde $A = \{(x, y) \in R^2; x^2 + y^2 < 1, x > 0\}$ é um semidisco aberto. Em M, a bola aberta de raio 1 e centro na origem é $B = \{(x, y) \in R^2, x^2 + y^2 < 1, x \leq 0\}$ enquanto a bola fechada correspondente é igual à reunião de $\overline{B} = \{(x, y) \in R^2; x^2 + y^2 \leq 1; x \leq 0\}$ com a semicircunferência $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0$.

27. Seja $f : R \to R$ a função contínua tal que $f(x) = 0$ se $x \leq 0$, $f(x) = 1$ se $x \geq 1$ e $f(x) = x$ se $0 < x < 1$. Então o conjunto dos pontos x tais que $f(x) < 1$ é o intervalo aberto $(-\infty, 1)$ e os pontos x nos quais $f(x) \leq 1$ constituem tôda a reta R. Evidentemente, R não é o fecho do intervalo $(-\infty, 1)$. Isto mostra que, dada uma função contínua $f : X \to R$, nem sempre $\{x \in X; f(x) \leq a\}$ é o fecho de $\{x \in X; f(x) < a\}$.

28. O significado informal da afirmação $x \in \overline{S}$ é que x pode ser arbitràriamente aproximado (no sentido da topologia considerada no caso) por elementos de S. Por exemplo, seja $X = \mathfrak{B}(M; N)$, espaço das aplicações limitadas do espaço métrico M no espaço métrico N. Dado um conjunto de aplicações $S \subset \mathfrak{B}(M; N)$, dizer que uma aplicação limitada $f : M \to N$ pertence ao fecho de S significa afirmar que, seja qual fôr $\epsilon > 0$ dado, é possível encontrar $g \in S$ tal que $d(f(x), g(x)) < \epsilon$ para todo $x \in M$.

29. Num espaço topológico X, seja x um ponto aderente a um subconjunto $S \subset X$. Então todo aberto A de X que contém x, contém também algum ponto de S. Há dois casos distintos a considerar: ou existe um aberto A, contendo x e formado exclusivamente por pontos de S, ou então todo aberto que contém x contém ao mesmo tempo pontos de S e pontos de $X - S$. O primeiro caso ocorre quando $x \in \text{int.}(S)$ e o segundo, quando $x \in \text{fr.}(S)$. Por conseguinte $\overline{S} = \text{int.}(S) \cup \text{fr.}(S)$, reunião disjunta. Daí resulta também que $\overline{S} = S \cup \text{fr.}(S)$, reunião não disjunta, a menos que S seja aberto. Desta última igualdade segue-se que *S é fechado se, e sòmente se, $S \supset fr.(S)$.*

§ 6. Pontos de Acumulação

A noção de ponto de acumulação gozou de destaque nos primórdios da Topologia Geral, mas tem sido relegada a um papel secundário, em parte

devido ao fato de que não se relaciona de maneira útil com as propriedades das funções contínuas. Não obstante, o conceito de ponto de acumulação não é de todo desprovido de interêsse, principalmente no estudo dos espaços métricos compactos, como veremos no Cap. VII.

Seja S um subconjunto de um espaço topológico X. Um ponto $x \in X$ chama-se *ponto de acumulação* de S quando tôda vizinhança V de x em X contém algum ponto $s \in S$, distinto do ponto x. O conjunto dos pontos de acumulação de S chama-se o *derivado de S* e indica-se com a notação S'.

EXEMPLO

30. Se S é o intervalo aberto $(0, 1)$ da reta, então S' é o intervalo fechado $[0, 1]$. Neste caso, S coincide com $\overline{S}$. Se $P = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\} \subset R$ então P' consiste sòmente do ponto 0. Seja $Z \subset R$ o conjunto dos números inteiros. Tem-se $Z' = \varnothing$, isto é, Z não possui pontos de acumulação. Dado o conjunto $Q \subset R$ dos números racionais, $Q' = R$.

PROPOSIÇÃO 21 — *Seja X um espaço topológico. Para todo subconjunto $S \subset X$, tem-se $\overline{S} = S \cup S'$.*

Demonstração: Isto é pràticamente uma tautologia. Os pontos de $\overline{S}$ são os pontos de S mais os pontos $x \notin S$ tais que tôda vizinhança de x contém algum $s \in S$ (necessàriamente distinto de x pois $x \notin S$). Êstes pontos pertencem a S'. Logo, $\overline{S} \subset S \cup S'$. Por outro lado, é claro que $S \subset \overline{S}$ e $S' \in \overline{S}$, donde $S \cup S' \subset \overline{S}$.

COROLÁRIO 1 — *Um conjunto $F \subset X$ é fechado se, e sòmente se, contém todos os seus pontos de acumulação.*

Com efeito, F é fechado se, e sòmente se, $F = \overline{F} = F \cup F'$. Mas $A = A \cup B$ é equivalente a $A \supset B$. Logo, F é fechado se, e sòmente se, $F \supset F'$.

COROLÁRIO 2 — *Se $S \subset X$ não possui pontos de acumulação, então todo subconjunto de S é fechado em X.*

Com efeito, é claro que $T \subset S$ implica $T' \subset S'$. Logo, $T' = \varnothing$ e portanto $T' \subset T$, isto é, T é fechado, qualquer que seja $T \subset S$.

PROPOSIÇÃO 22 — *Seja X um espaço de Hausdorff. Para que um ponto $x \in X$ seja ponto de acumulação de um subconjunto $S \subset X$ é necessário e suficiente que tôda vizinhança de x contenha uma infinidade de pontos de S.*

Demonstração. A condição é evidentemente suficiente em qualquer espaço. Para demonstrar a necessidade, seja $x \in S'$, e consideremos uma vizinhança V de x. Mostraremos, por indução, que existe um conjunto enumerável $\{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\}$ de pontos de S na vizinhança V.

Como x é ponto de acumulação de S, existe $s_1 \in S \cap V$, $s_1 \neq x$. Suponhamos obtidos n pontos distintos, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ pertencentes a $S \cap V$ e diferentes de x. Como X é um espaço de Hausdorff, o conjunto $\{s_1, \ldots, s_n\}$ é fechado (e não contém x). Logo, existe uma vizinhança U de x em X, a qual não contém nenhum dos pontos $s_1, \ldots, s_n$. O conjunto $U \cap V$ é uma vizinhança de x e portanto contém um ponto $s_{n+1} \in S$, distinto de x. Segue-se que s_{n+1} é diferente dos demais s_i, e pertence a $S \cap V$, o que completa a construção indutiva do conjunto infinito $\{s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots\}$ e demonstra a proposição.

Corolário — *Num espaço de Hausdorff, todo conjunto finito tem derivado vazio.*

Observação — Não foi usada, na demonstração acima, tôda a hipótese de que X é um espaço de Hausdorff. Bastaria supor que X fôsse um "espaço T_1", isto é, um espaço no qual todo ponto é um subconjunto fechado. Esta hipótese é necessária para a validez da Prop. 22 (e do seu Corolário) pois se existir um ponto $x \in X$ que não é um subconjunto fechado, existirá também um ponto $y \in X$, $y \neq x$, tal que tôda vizinhança de y contém x. Então, y será ponto de acumulação do conjunto $\{x\}$, que tem um só elemento.

Proposição 23 — *Num espaço de Hausdorff X, o derivado de qualquer subconjunto S é fechado; isto é, $S' \supset S''$.*

Demonstração: Se $x'' \in S''$, dada qualquer vizinhança U de x'' em X, existe um ponto $x' \in S' \cap U$, $x' \neq x''$. Segue-se do axioma de Hausdorff que existe uma vizinhança V de x' em X tal que $x'' \notin V$. Seja $W = U \cap V$. Então, W é uma vizinhança de x' e $W \subset U$. Como $x' \in S'$, existe um ponto $x \in S \cap W$ (tem-se $x' \neq x$ mas isto não é necessário aqui). Logo $x \in S \cap U$ e $x \neq x''$ (pois $x'' \notin W$). Isto mostra que todo $x'' \in S''$ pertence também a S'.

Observação — Novamente aqui basta supor que os pontos de X são subconjuntos fechados. Esta hipótese não pode ser dispensada.

§ 7. Espaços Conexos

Foi visto no Ex. 17, que um subconjunto S de um espaço topológico X pode ser simultâneamente aberto e fechado em X. O conjunto vazio $\varnothing$ e o espaço inteiro X sempre o são.

Um espaço topológico X chama-se *conexo* quando $\varnothing$ e X são os únicos subconjuntos de X simultâneamente abertos e fechados.

Intuitivamente, um espaço *conexo* é constituído de "um só pedaço". Um espaço discreto com mais de um ponto, por exemplo, é *desconexo* (isto é, não é conexo). Com efeito, qualquer um dos seus subconjuntos é simultâneamente aberto e fechado. O conjunto $R - \{0\}$ dos números reais diferentes de zero também é um espaço desconexo (com a topologia natural, induzida da reta) pois o subconjunto $S \subset R - \{0\}$, formado pelos números negativos, é aberto e fechado em $R - \{0\}$. (Vide Ex. 17.)

Um subconjunto S de um espaço topológico X chama-se um *subconjunto conexo* quando, com a topologia induzida de X, S é um espaço topológico conexo.

EXEMPLO

31. Todo subconjunto vazio, bem como todo subconjunto reduzido a um só ponto, é um subconjunto conexo de qualquer espaço topológico. Por outro lado, no espaço Q dos números racionais, nenhum subconjunto S contendo mais de um ponto é conexo. Com efeito sejam $a < b$ números racionais pertencentes a S. Existe um número irracional ξ tal que $a < \xi < b$. Sejam $A_\xi = \{r \in Q; r < \xi\}$ e $B_\xi = \{r \in Q; r > \xi\}$. Temos $Q = A_\xi \cup B_\xi$, onde A_ξ e B_ξ são disjuntos, não-vazios e abertos em Q. Por outro lado, A_ξ e B_ξ são também fechados em Q pois cada um dêles tem o outro (um conjunto aberto) como complementar. Isto já mostra que Q é desconexo. Quanto ao subconjunto S, basta notar que $A_\xi \cap S$ é aberto e fechado em S, não-vazio (pois contém o ponto a) e diferente do espaço inteiro (pois não contém b).

A existência, num espaço topológico X, de um subconjunto A, aberto e fechado, diferente de X e de $\varnothing$, é equivalente à existência de uma decomposição $X = A \cup B$, com $A \cap B = \varnothing$, A e B ambos abertos (e, por conseguinte fechados) e não-vazios. Basta tomar $B = X - A$.

Segue-se que um espaço topológico X é conexo se, e sòmente se, não pode ser expresso como reunião de dois subconjuntos abertos, disjuntos e não-vazios.

Esta formulação do conceito de espaço conexo está mais próxima da idéia do espaço de um só pedaço.

Observamos ainda que um subconjunto $S \subset X$ é aberto se, e sòmente se, não contém nenhum ponto de sua fronteira e é fechado se, e sòmente se, contém todos os pontos da sua fronteira. Logo, S é aberto e fechado simultâneamente se, e sòmente se, sua fronteira é vazia.

Por conseguinte, a fim de que um espaço topológico seja conexo é necessário e suficiente que X e $\varnothing$ sejam os únicos subconjuntos de X com fronteira vazia.

Até agora não demos um só exemplo não-trivial de espaço conexo. A proposição abaixo estabelecerá o primeiro e, provàvelmente, o mais importante exemplo de conexidade.

Proposição 24 — *Todo intervālo da reta é um espaço conexo.*

Demonstração: Seja I um intervalo de extremos a e b. A demonstração vale quer I seja aberto, fechado, semi-aberto, limitado ou ilimitado. Em particular, pode ser $a = -\infty$ ou $b = +\infty$ e portanto um corolário é que a reta $R = (-\infty, +\infty)$ é conexa. Seja $S \subset I$ aberto e fechado em I. Suponhamos $S \neq \varnothing$ e mostremos que isto implica $S = I$. Como S é aberto em I, podemos tomar um ponto $c \in S$, interior ao intervalo I. Seja $b' = \sup.\{t \in I; [c, y) \subset S\}$. Temos $c < b'$ e afirmamos que $[c, b') \subset S$. Com efeito, se $x \in [c, b')$, isto é, $c \leq x < b'$, então, pela definição de sup., existe $t \in I$ com $x < t$ e $[c, t) \subset S$; portanto $x \in S$. Afirmamos agora que $b' = b$. Do contrário, teríamos $b' < b$, donde $b' \in I$ e, como S é fechado em I, $b' \in S$, ou seja $[c, b'] \subset S$. Como S é aberto em I, existiria $\epsilon > 0$ tal que $[c, b' + \epsilon) \subset S$ e isto viria contradizer a definição de b'. Logo, $b' = b$ e $[c, b) \subset S$. Anàlogamente se mostra que $(a, c] \subset S$ e portanto $(a, b) \subset S$. Como S é fechado em I, o fecho de (a, b) relativamente a I está contido em S. Mas tal fecho é I. Logo, $I = S$.

Proposição 25 — (Recíproca da anterior) — *Todo subconjunto conexo da reta é um intervalo.*

Demonstração: Com efeito, se um subconjunto $S \subset R$ não fôr um intervalo, existirão números reais $a, b \in S$, $c \notin S$, tais que $a < c < b$. Segue-se que $A = (-\infty, c) \cap S$ e $B = (c, +\infty) \cap S$ são abertos em S, disjuntos, não-vazios (pois $a \in A$ e $b \in B$), com $S = A \cup B$ (pois $c \notin S$). Logo, S é desconexo.

Observação — Já resulta da Prop. 25 que nenhum conjunto de números racionais contendo mais de um ponto pode ser conexo. Anàlogamente nenhum conjunto de números *irracionais* com mais de um elemento pode ser conexo. Com efeito, todo intervalo não-degenerado da reta contém ao mesmo tempo números racionais e números irracionais.

Proposição 26 — *A imagem de um conjunto conexo S por uma aplicação contínua $f : X \to Y$ é um conjunto conexo $f(S)$.*

Demonstração: Como ser conexo é uma propriedade intrínseca do espaço topológico S (isto é, não depende do espaço X onde S está contido), basta considerar o caso em que $S = X$ e $f(S) = Y$. Assim, suponhamos

que X seja conexo e f é uma aplicação contínua de X sôbre Y. Então — afirmamos — Y deve ser conexo. Do contrário existiria em Y um subconjunto B aberto e fechado, diferente de Y e de $\emptyset$. Considerando $A = f^{-1}(B)$, teríamos A aberto e fechado em X, pois f é contínua. Além disso, $A \neq X$ pois $B \neq Y$ e $A \neq \emptyset$ pois $B \neq \emptyset$ e f é sôbre Y. Isto contradiria a conexidade de X.

Corolário 1 — *Sejam X um espaço topológico conexo e $f : X \to R$ uma função real contínua. A imagem $f(X)$ é um intervalo.*

Com efeito, $f(X)$ é conexo em virtude da Prop. 26, logo é um intervalo em virtude da Prop. 25.

Segue-se daí que uma função f, real, contínua, definida num intervalo, que assume dois valôres $f(a)$ e $f(b)$, assume também todos os valôres compreendidos entre a e b. Mais formalmente:

Corolário 2 — *Seja $f : [a, b] \to R$ uma função real contínua definida no intervalo $[a, b]$. Se $f(a) < c < f(b)$, então existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = c$.*

Com efeito, $[a, b]$ é conexo, logo $f([a, b])$ é um intervalo. Como $f(a) < < c < f(b)$, segue-se que c pertence ao intervalo $f([a, b])$.

As Props. 24 e 26 permitem que se obtenham vários exemplos de espaços conexos. A fim de apresentar tais exemplos no contexto adequado, introduziremos agora um tipo importante, embora mais restrito, de espaço topológico conexo.

Um *caminho* num espaço topológico X é uma aplicação contínua $f : I \to X$, onde I é o intervalo fechado $[0, 1]$. Os pontos $a = f(0)$ e $b = f(1)$ são chamados as *extremidades* do caminho f; $a = f(0)$ é o *ponto inicial* e $b = f(1)$ é o *ponto final*. Diz-se também que os pontos a e b são *ligados* pelo caminho f.

Um espaço topológico X diz-se *conexo por caminhos* quando, dados dois pontos quaisquer $a, b \in X$, existe sempre um caminho $f : I \to X$ com $f(0) = a$ e $f(1) = b$.

EXEMPLOS

32. Seja E um espaço vetorial normado. Dados dois pontos $a, b \in E$, existe um caminho canônico em E cujo ponto inicial é a e cujo ponto final é b. Trata-se de $f : I \to E$, definido por $f(t) = (1 - t)a + tb$. A imagem $f(I)$ dêste caminho chama-se o *segmento de reta de extremos a, b* e é indicada com $[a, b]$. Um subconjunto $S \subset E$ chama-se *convexo* quando, dados dois pontos quaisquer $a, b \in S$, o segmento de reta $[a, b] = \{(1 - t)a + tb; 0 \leq \leq t \leq 1\}$ está inteiramente contido em S. Exemplos de subconjuntos convexos de E são: o espaço inteiro E; todo subespaço vetorial $L \subset E$;

tôda variedade afim $v + L \subset E$ e tôda bola $B(v; \epsilon) = \{x \in E; |x - v| < \epsilon\}$. Verifiquemos esta última afirmação. Dados $x, y \in B(v; \epsilon)$, queremos mostrar que $(1 - t)x + ty \in B(v, \epsilon)$ para qualquer $t \in [0, 1]$. Ora, $|(1 - t)x + ty - v| = |(1 - t)(x - v) + t(y - v)| \leq |(1 - t)(x - v)| + |t(y - v)| = (1 - t)|x - v| + t|y - v| < (1 - t)\epsilon + t\epsilon = \epsilon$. Do mesmo modo verificaríamos que tôda bola fechada $D(v; \epsilon)$ é convexa. Isto porém é conseqüência do fato mais geral, segundo o qual o fecho de um subconjunto convexo de E é convexo. (Verificação a cargo do leitor.) Todo conjunto convexo é conexo por caminhos.

33. Sejam X um conjunto arbitrário e E um espaço vetorial normado. O conjunto $\mathfrak{B}(X; E)$ das aplicações limitadas de X em E é um espaço vetorial normado, onde $|f| = \sup.\{f(x); x \in X\}$. Em particular, $\mathfrak{B}(X; E)$ é convexo e portanto conexo por caminhos. Mais geralmente, dado um subconjunto convexo $S \subset E$, é fácil ver que $\mathfrak{B}(X; S)$ é um subconjunto convexo de $\mathfrak{B}(X; E)$. Em particular, segue-se que $\mathfrak{B}(X; S)$ é um espaço topológico conexo por caminhos.

Se os caminhos $f, g : I \to X$, no mesmo espaço topológico X, são tais que $f(1) = g(0)$, pode-se definir o caminho *justaposto* $f \vee g : I \to X$, do seguinte modo:

$$(f \vee g)(t) = f(2t) \quad \text{se } 0 \leq t \leq 1/2;$$
$$(f \vee g)(t) = g(2t\text{-}1) \text{ se } 1/2 \leq t \leq 1.$$

Ambas as expressões fornecem o mesmo valor $(f \vee g)(1/2)$, de modo que $f \vee g : I \to X$ é bem definida. Além disso, $f \vee g$ é contínua, em virtude do Ex. 24, com $F_1 = [0, 1/2]$ e $F_2 = [1/2, 1]$.

O caminho $f \vee g$, formado por justaposição de f e g, consiste em percorrer primeiro f e depois g (com velocidade duplicada). É claro que $f \vee g$ começa em $f(0)$ e termina em $g(1)$.

A relação "existe um caminho começando em x e terminando em y" é evidentemente reflexiva. A construção $f \vee g$ mostra que esta relação é transitiva. Finalmente, dado f, o caminho $f^-: I \to X$, com $f^-(t) = f(1-t)$ mostra que ela é simétrica, e portanto é uma relação de equivalência.

Proposição 27 — *Todo espaço topológico conexo por caminhos é conexo.*

Demonstração: Seja X um espaço conexo por caminhos e suponhamos, por absurdo, que exista em X um subconjunto aberto e fechado A, com $A \neq X$ e $A \neq \varnothing$. Tomando um ponto $a \in A$ e um ponto $b \in X - A$, existiria um caminho $f : I \to X$ com $f(0) = a$ e $f(1) = b$. O conjunto $A \cap f(I)$ seria aberto e fechado em $f(I)$, diferente de $f(I)$ porque $b \notin A$, e não-vazio porque $a \in A \cap f(I)$. Isto contradiz que $f(I)$ seja conexo e demonstra a proposição.

EXEMPLOS

34. A esfera $S^n = \{x \in R^{n+1}; |x| = 1\}$ é conexa se $n \geq 1$. Basta mostrar que S^n é conexa por caminhos. Dados $a \neq b$ em S^n, dois casos podem ocorrer: ou $a = -b$ ou $a \neq -b$. No primeiro caso, diremos que os pontos a e b são *antípodas*, ou *diametralmente opostos*. No segundo caso, (em que a e b não são antípodas) o segmento $[a, b]$ não contém a origem. Ou seja, dados $a \neq b$ em S^n, se $a \neq b$ então $(1 - t)a + tb \neq 0$ para $0 \leq t \leq 1$ arbitrário. Se fôsse $(1 - t)a + tb = 0$, seria $(1 - t)a = -tb$, donde $(1 - t)|a| = t|b|$ e, como $|a| = |b| = 1$, $1 - t = t, t = 1/2$ e $a = -b$. Assim, se a e b não são antípodas, a aplicação $f : I \to S^n$, definida por

$$f(t) = \frac{(1 - t)a + tb}{|(1 - t)a + tb|},$$

é um caminho que começa em $a = f(0)$ e termina em $b = f(1)$. [Geomètricamente, quando t varia de 0 a 1, $f(t)$ percorre o mais curto dos dois arcos de grande círculo que ligam a a b.] Se, porém, a e b são antípodas, então qualquer ponto $c \in S^n - \{a, b\}$ não é o antípoda de a nem de b. Logo, existem caminhos $f, g : I \to S^n$, com $f(0) = a$, $f(1) = c$, $g(0) = c$, $g(1) = b$. Definimos um nôvo caminho $h : I \to S^n$, pondo $h = f \vee g$. [Vide acima a definição de caminho justaposto $f \vee g$.] Tem-se então $h(0) = a$ e $h(1) = b$. [Geomètricamente, $h(t)$ ainda descreve um arco de grande círculo ligando a a b. Acontece que, quando a e b são antípodas, existem infinitos grandes círculos ligando a e b. Foi preciso tomar o ponto c a fim de fixar um dêsses círculos.] Observe-se que esta demonstração vale ainda qualquer que seja o espaço vetorial normado E de dimensão > 1, tomado em vez de R^n: o conjunto S, dos vetores $x \in E$ tais que $|x| = 1$, é conexo por arcos e conseqüentemente conexo. Em particular, tomando em R^n a norma $|x|' = \text{máx.}\{|x^1|, \ldots, |x^n|\}$, para $x = (x^1, \ldots, x^n)$, vemos que a fronteira do cubo $[-1, 1] \times \ldots \times [-1, 1] = [-1, 1]^n$ é conexa, pois tal fronteira é o conjunto dos pontos $x \in R^n$ tais que $|x|' = 1$.

35. Daremos agora o exemplo de um espaço topológico X que é conexo mas não é conexo por caminhos. Isto mostrará que a recíproca da Prop. 27 não é válida. X é um subespaço do plano, formado pela reunião do segmento unitário $J = \{(x, 0); 0 \leq x \leq 1\}$ do eixo das abscissas, com todos os segmentos verticais unitários $J_n = \{(1/n, y); 0 \leq y \leq 1\}$ erigidos sôbre os pontos de J que têm abscissa da forma $1/n$, $n \in N$, e mais o ponto $a = (0, 1/2)$. (Vide figura na página seguinte.)

Para mostrar que X não é conexo por caminhos, basta provar que todo caminho $f : I \to X$, tal que $f(0) = a$, é necessàriamente constante, isto é,

$f(t) = a$ para todo $t \in I$. Como X é um subconjunto do plano, temos $f(t) = (x(t), y(t))$, onde $x, y : I \to R$ são funções contínuas. Mostraremos primeiro que $x(t)$ é constante. Suponhamos, por absurdo, que $x(t) > 0$ para algum valor de t. Pondo $t_0 =$ $= \sup. \{t \in I; x([0, t]) = 0\}$, ter-se-á então $t_0 < 1$. É claro que $x(t_0) = 0$. Como 0 e a são os únicos pontos de X com abscissa zero, vemos que $f([0, t_0])$ é um subconjunto (conexo) de $\{0, a\}$. Mas $f(0) = a$, logo $f([0, t_0]) =$ $= a$. Em particular, $y(t_0) = 1/2$. Sendo $y(t)$ contínua, existe $\epsilon > 0$, com $t_0 + \epsilon < 1$, tal que $s \in [t_0, t_0 + \epsilon)$ implica $y(s) \geq 1/4$. Pela definição de t_0, existe t_1, com $t_0 < t_1 < t_0 + \epsilon$ e $x(t_1) > 0$. Quando t varia de t_0 a t_1, $x(t)$ assume todos os valôres compreendidos entre 0 e $x(t_1)$ (Corolário da Prop. 26). Logo, podemos achar $s \in (t_0, t_1)$, (em particular, $s \in [t_0, t_0 + \epsilon)$) tal que $x(s) \neq 1/m$, qualquer que seja o inteiro m. Como $(x(s), y(s)) \in X$, isso acarreta $y(s) = 0$, porque os únicos pontos de X com ordenada $\neq 0$ são os da forma $(1/m, y)$. Mas devíamos ter $y(s) \geq 1/4$. Contradição. Temos $x(t) = 0$ para todo $t \in I$. Segue-se que $f(I) \subset \{0, a\}$. Como $f(I)$ é conexo e $f(0) = a$, concluímos finalmente que $f(I) = a$. Note-se que $A = X - \{a\}$ é conexo por caminhos e portanto conexo. (Dois pontos quaisquer de A podem ser ligados por um caminho poligonal formado, no máximo, por três segmentos de reta.) A proposição abaixo permite então concluir que X é conexo.

Proposição 28 — *Sejam X um espaço topológico e S um subconjunto de X tal que $\overline{S} = X$. Se S fôr conexo, X também o será.*

Demonstração: Nestas condições, para todo subconjunto aberto não-vazio $A \subset X$, o conjunto $A \cap S$ é aberto em S e não-vazio. Se X não fôsse conexo, existiria uma decomposição $X = A \cup B$, com A e B abertos disjuntos e não-vazios. Então, $S = X \cap S = (A \cap S) \cup (B \cap S)$, donde S seria desconexo.

Corolário — *Seja S um subconjunto conexo do espaço topológico X. Se $S \subset T \subset \overline{S}$, então T é conexo.*

Com efeito, o fecho de S em T será então igual a T.

EXEMPLOS

36. A noção de espaço conexo proporciona um dos métodos mais simples de demonstrar que dois espaços X e Y não são homeomorfos. A

idéia é a seguinte: se existir um homeomorfismo $h : X \to Y$ então, qualquer que seja $a \in X$, a restrição $h|X - \{a\}$ é um homeomorfismo de $X - \{a\}$ sôbre $Y - \{h(a)\}$. Então, $X - \{a\}$ será conexo se, e sòmente se, $Y - \{h(a)\}$ o fôr. Por exemplo, o intervalo aberto (a, b) não pode ser homeomorfo a um intervalo semi-aberto $[c, d)$. Com efeito, se existisse um homeomorfismo $h : [c, d) \to (a, b)$, por restrição, obteríamos um homeomorfismo entre $(c, d) = [c, d) - \{c\}$ e $(a, b) - \{h(c)\}$, o que é um absurdo pois o primeiro dêstes espaços é conexo, enquanto que, seja qual fôr o ponto $h(c) \in (a, b)$, seu complemento $(a, b) - \{h(c)\}$ é desconexo. De maneira semelhante se verifica que o círculo unitário $S^1 = \{(x, y) \in R^2; x^2 + y^2 = 1\}$ não é homeomorfo a nenhum subconjunto da reta. Com efeito, como S^1 é conexo (*Cf.* Ex. 34) tal subconjunto da reta deveria também ser conexo, logo, seria um intervalo. Ora, um intervalo da reta deixa de ser conexo quando dêle se omite um ponto interior, enquanto o que $S^1 - \{z\}$ é conexo qualquer que seja $z \in S^1$.

37. Usando ainda o método de Ex. 36, podemos mostrar que se S é um subconjunto da reta e $h : S \to R^2$ é um homeomorfismo de S sôbre um subconjunto $f(S)$ do plano, então $f(S)$ tem interior vazio em R^2. Com efeito, se $f(S)$ possuísse algum ponto interior, existiria um disco plano $D \subset f(S)$. Sendo D conexo (até mesmo convexo) sua imagem pelo homeomorfismo inverso h^{-1} seria um intervalo da reta. Basta pois, demonstrar que um intervalo da reta não pode ser homeomorfo a um disco do plano. Ora, o intervalo fica desconexo quando dêle é removido um ponto interior enquanto o disco continua conexo quando se remove qualquer um dos seus pontos. Observamos aqui que a imagem de um intervalo por uma aplicação contínua $f : I \to R^2$ pode conter pontos interiores. Um famoso exemplo, devido a Peano, exibe um caminho $f : I \to R^2$ tal que $f(I)$ é todo disco. (Vide Cap. IX, Ex. 10.)

Caracterizemos agora os homeomorfismos entre intervalos da reta. Seja $J \subset R$ um intervalo (aberto, fechado ou semi-aberto). Uma função $f : J \to R$ diz-se *estritamente crescente* quando $s < t$ em J implica $f(s) < f(t)$. Se $s < t$ implicar $f(s) > f(t)$, diremos que f é *estritamente decrescente*. Finalmente, diremos que f é *estritamente monótona* quando fôr estritamente crescente ou estritamente decrescente.

Proposição 29 — *Seja $J \subset R$ um intervalo. Uma função contínua $f : J \to R$ definirá um homeomorfismo de J sôbre $f(J)$ se, e sòmente se, fôr estritamente monótona.*

Demonstração: Seja f estritamente monótona. Para fixar as idéias, suponhamos f crescente. Provemos a continuidade de $f^{-1} : f(J) \to J$ num ponto qualquer $f(a)$, onde $a \in J$. Inicialmente, consideremos o caso em

que a é interior ao intervalo J. Dado $\epsilon > 0$, com $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset J$, temos $f(a - \epsilon) < f(a) < f(a + \epsilon)$, em virtude da monotonicidade de f. Afirmamos que $f(x) \in (f(a - \epsilon), f(a + \epsilon))$ implica $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$. Com efeito, se fôsse $a + \epsilon \leq x$, teríamos $f(a + \epsilon) \leq f(x)$ e, por outro lado, $x \leq |a - \epsilon|$ implicaria $f(x) \leq f(a - \epsilon)$. Isto prova que f^{-1} é contínua no ponto a. No caso de a ser extremo inferior de J, basta considerar $[a, b + \epsilon)$ em vez de $(a - \epsilon, a + \epsilon)$. Quando a fôr extremo superior de J, tome-se $(a - \epsilon, a]$. Recìprocamente, suponhamos que f não seja estritamente monótona e mostremos que então f não é biunívoca e portanto não pode ser um homeomorfismo. Sendo violada a monotonicidade de f, ter-se-á, digamos, $a < b < c$ em J, com $f(a) < f(c) < f(b)$. Pelo Cor. 2 da Prop. 26, existirá então um ponto x tal que $a < x < b$ e $(x) = f(c)$, e f não será biunívoca.

EXEMPLOS

38. Sejam $D = \{x \in R^2; |x - a| \leq r\}$ um disco do plano e $C = \{x \in R^2; |x - a| = r\}$ a sua fronteira. Dados os pontos x no interior de D e y, no seu exterior, isto é, $|x - a| < r$ e $|y - a| > r$, todo caminho $f : I \to R^2$ tal que $f(0) = x$ e $f(1) = y$ deve cortar o círculo C. Com efeito, dado f, a função $\varphi : I \to R$, definida por $\varphi(t) = |f(t) - a|$, é contínua, assume um valor $< r$ para $t = 0$ e um valor $> r$ para $t = 1$. Logo, existe $t_0 \in I$ tal que $\varphi(t_0) = r$. Então, $|f(t_0) - a| = r$ e portanto $f(t_0) \in C$. Isto significa que o complemento $R^2 - C$ do círculo C no plano é desconexo. (Vide fim do § 3, Cap. II.) Um teorema mais geral e muito mais delicado, o Teorema da Curva de Jordan, diz que $R^2 - C$ é a reunião de dois abertos conexos, seja qual fôr C homeomorfo a um círculo. Para uma demonstração do Teorema de Jordan, vide [Newman].

39. Dois subconjuntos conexos de um espaço X podem ter uma interseção desconexa. Por exemplo, no círculo $S^1 = \{(x, y) \in R^2; x^2 + y^2 = 1\}$, os semicírculos $A = \{(x, y) \in S^1; y \geq 0\}$ e $B = \{(x, y) \in S^1; y \leq 0\}$ são conexos, pois a projeção $(x, y) \to x$ estabelece homeomorfismos entre cada um dêles e o intervalo $[-1, +1]$. Entretanto, a interseção $A \cap B$ consiste dos dois pontos $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ e portanto é desconexa. Também a reunião de dois subconjuntos conexos disjuntos é quase sempre desconexa, mas pode ser conexa, como no Ex. 35, onde $X = \{a\} \cup (X - \{a\})$. Por outro lado:

Proposição 30 — *Seja* (S_λ) *uma família de subconjuntos conexos de um espaço topológico. Se existir um ponto* x_0, *comum a todos os* S_λ, *a reunião* $S = \bigcup S_\lambda$ *será conexa.*

Demonstração: Seja $A \subset S$ aberto e fechado em S. Substituindo, se necessário, A por $S - A$ (que ainda será aberto e fechado), podemos supor que $x_0 \in A$. Para cada λ, então, $A \cap S_\lambda$ será aberto, fechado e não-vazio em S_λ. Como S_λ é conexo, teremos $A \cap S_\lambda = S_\lambda$ para todo λ. Portanto, $S_\lambda \subset A$ para todo λ, donde $S = \bigcup S_\lambda \subset A$, isto é, $S = A$, concluindo a demonstração.

A proposição acima tem como conseqüência que a reunião de todos os subconjuntos conexos de um espaço topológico X que contêm um ponto $x \in X$ é um conjunto conexo C_x, ao qual chamaremos a *componente conexa de* x no espaço X.

A componente conexa C_x é um subconjunto conexo *máximo* de X, isto é, se $C_x \subset S \subset X$ e S é conexo, então $C_x = S$. Resulta daí, em particular, que tôda componente conexa é um conjunto fechado, pois seu fecho $\overline{C}_x$ ainda é conexo (Corolário da Prop. 28) e $C_x \subset \overline{C}_x$.

O espaço X será conexo se, e sòmente se, fôr a componente conexa de cada um dos seus pontos.

As componentes conexas C_x e C_y de dois pontos $x, y \in X$ ou coincidem ou são disjuntas. Com efeito, de $C_x \cap C_y \neq \emptyset$ segue-se, pela Prop. 30, que $C_x \cup C_y$ é um conjunto conexo contendo C_x e C_y. Pela maximalidade das componentes segue-se que $C_x = C_x \cup C_y = C_y$. Portanto, a relação "x e y pertencem à mesma componente conexa em X" é uma relação de equivalência.

Todo espaço topológico X é, pois, uma reunião de subconjuntos fechados disjuntos, suas componentes conexas, os quais se caracterizam por serem conexos máximos em X.

EXEMPLO

40. Num espaço topológico discreto, cada componente conexa se reduz a um ponto. O conjunto Q dos números racionais não é discreto, mas cada componente conexa em Q reduz-se ainda a um ponto. O mesmo ocorre no conjunto dos números irracionais. A componente conexa de cada ponto $x \in R^n$ é todo o espaço euclidiano R^n. As componentes conexas de $R - \{0\}$ são duas: o conjunto dos números reais negativos e o conjunto dos números reais positivos.

Um espaço topológico X diz-se *totalmente desconexo* quando seus únicos subconjuntos conexos são $\emptyset$ e seus pontos. Isto equivale a dizer que suas componentes conexas são pontos. (Vide Ex. 39.)

Um subconjunto da reta é totalmente desconexo se, e sòmente se, não contém intervalo algum.

Um espaço topológico X diz-se *localmente conexo* quando para todo $x \in X$ e tôda vizinhança U de x, existe uma vizinhança conexa V de x tal que $V \subset U$. Intuitivamente, isto exprime que todo pondo de x possui vizinhanças conexas arbitràriamente pequenas.

EXEMPLOS

41. Um espaço discreto com mais de um ponto é localmente conexo mas não é conexo. O conjunto dos números racionais não é conexo nem localmente conexo. Todo espaço vetorial normado é localmente conexo pois cada bola é conexa. Todo subconjunto aberto de um espaço localmente conexo é ainda localmente conexo.

42. Um espaço conexo pode não ser localmente conexo. Considere-se, por exemplo, o espaço $Y \subset R^2$, formado pelos eixos coordenados e mais as retas verticais que passam pelos pontos $(1/n, 0)$, $n \in N$. Evidentemente, X é conexo (por caminhos) mas, para $y \neq 0$, tôdas as vizinhanças suficientemente pequenas do ponto $(0, y)$ são desconexas. Também no Ex. 35, o espaço X é conexo mas tôdas as vizinhanças suficientemente pequenas do ponto a são desconexas.

A proposição abaixo implica, em particular, que nos espaços localmente conexos as componentes conexas são subconjuntos abertos (e fechados). É em tais espaços, portanto, que a decomposição em componentes assume o aspecto intuitivo de reunião de conexos inteiramente separados uns dos outros. (Note-se, por exemplo, que em Q as componentes não são abertas.)

Proposição 31 — *A fim de que um espaço topológico X seja localmente conexo, é necessário e suficiente que, para cada aberto $A \subset X$, as componentes conexas de A sejam subconjuntos abertos de X.*

Demonstração: Sejam X localmente conexo, $A \subset X$ aberto e C uma componente conexa de A. Dado qualquer $x \in C$, existe uma vizinhança conexa V de x, com $x \in V \subset A$. Assim, $V \cup C$ é um subconjunto conexo de A. Como C é máximo, $V \cup C = C$, isto é, $V \subset C$, o que prova que C é aberto. Mostremos agora que a condição é suficiente. Dado $x \in X$, seja U uma vizinhança qualquer de x em X. Existe um aberto A com $x \in A \subset U$. A componente conexa de x em A é, por hipótese, um aberto (conexo) V com $x \in V \subset A$, donde $V \subset U$. Isto prova que X é localmente conexo.

Podemos ainda definir a *componente conexa por caminhos* de um ponto x, num espaço topológico X, como a reunião de todos os subconjuntos conexos por caminhos de X que contém x. Cada componente conexa por caminhos é uma classe de equivalência da relação "existe um caminho em X ligando x a y", e pode também ser caracterizada como um subconjunto de X máximo relativamente à propriedade de ser conexo por caminhos.

Uma componente conexa por caminhos pode não ser um subconjunto fechado de X, como se vê no Ex. 35, onde as componentes conexas por caminhos são o ponto a e o conjunto $X - \{a\}$.

Um espaço topológico X diz-se *localmente conexo por caminhos* quando, para todo ponto $x \in X$ e tôda vizinhança U de x existe uma vizinhança V de x, conexa por caminhos, com $V \subset U$. Em outras palavras: todo ponto $x \in X$ possui vizinhanças conexas por caminhos arbitràriamente pequenos.

No Ex. 42, o espaço X é conexo por caminhos. Assim, para cada $n \in N$, o ponto $(0, 1)$ pode ser ligado ao ponto $(1/n, 1)$ por um caminho "grande" (que desce até o eixo das abscissas e depois sobe ao longo da vertical de abscissa $1/n$). Mas não existem caminhos "pequenos" ligando êsses pontos. Mais precisamente: tôda vizinhança suficientemente pequena de $(0,1)$ em X é desconexa, donde desconexa por caminhos.

Todo espaço vetorial normado é localmente conexo por caminhos, pois as bolas são conexas por caminhos. Todo subconjunto aberto de um espaço localmente conexo por caminhos, ainda goza dessa mesma propriedade. Assim, os subconjuntos abertos dos espaços vetoriais normados (em particular, do R^n) são localmente conexos por caminhos.

A proposição abaixo fornece uma recíproca parcial da Prop. 27.

PROPOSIÇÃO 32 — *Seja X um espaço localmente conexo por caminhos. Se X fôr conexo, será também conexo por caminhos.*

Demonstração: Fixemos um ponto $a \in X$ e consideremos o conjunto $A = \{x \in X; x$ pode ser ligado ao ponto a por um caminho$\}$. Mostremos que A é aberto em X. Dado qualquer $x \in A$, seja V uma vizinhança de x conexa por caminhos. Para todo $y \in V$, existe um caminho f ligando y a x. Como $x \in A$, existe um caminho g ligando x a a. Logo, o caminho $f \vee g$ liga y a a e portanto $y \in A$. Assim, $V \subset A$, donde A é aberto. De maneira análoga se verifica que $X - A$ é aberto. Sendo $a \in A$, temos $A = X$, pela hipótese de ser X conexo. Assim, todo ponto de X pode ser ligado ao ponto a por um caminho e conseqüentemente X é conexo por caminhos.

EXEMPLO

43. Segue-se da proposição anterior que um subconjunto aberto de um espaço vetorial normado (em particular, um aberto do espaço euclidiano

R^n) é conexo se, e sòmente se, é conexo por caminhos. Neste caso, porém, é possível afirmar um resultado mais preciso. Dado um espaço vetorial normado E, diremos que um caminho $f : I \to E$ é *poligonal* quando $f = f_1 \vee \ldots \vee f_n$ é a justaposição de um número finito de segmentos de reta $f_i : I \to E$. O resultado mais preciso é o seguinte: um subconjunto aberto U de um espaço vetorial normado E é conexo se, e sòmente se, dois pontos quaisquer de S podem ser ligados por um caminho poligonal contido em U. A demonstração se faz exatamente como na Prop. 32, observando-se apenas que a relação "existe um caminho poligonal em U ligando x a y" é uma equivalência, e que todo ponto $x \in U$ possui uma vizinhança V (a saber: uma bola) contida em U tal que dois pontos quaisquer de V podem ser ligados por um caminho poligonal.

Proposição 33 — *Seja C um subconjunto conexo de um espaço topológico X. Se, para algum $S \subset X$, tem-se $C \cap int.(S) \neq \emptyset$ e $C \cap (X - S) \neq \emptyset$, então $C \cap fr.(S) \neq \emptyset$. Ou seja: se um conjunto conexo C contém um ponto interior de S e um ponto fora de S, então C contém algum ponto da fronteira de S.*

Demonstração: O conjunto $A = C \cap \text{int.}(S)$ é aberto em C e não-vazio. Além disso $A \neq C$ porque C não está contido em S. Como C é conexo, segue-se que A não é fechado em C. Existe portanto um ponto $x \in C$ tal que $x \notin A$ mas tôda vizinhança de x em C tem pontos em comum com A. Em particular, $x \notin \text{int.}(S)$ e tôda vizinhança de x em X contém pontos de S. Logo, $x \in \text{fr.}(S)$ e por conseguinte $C \cap \text{fr.}(S) \neq \emptyset$.

§ 8. Exercícios

1. Em cada um dos casos abaixo, determinar se A é ou não um subconjunto aberto do espaço métrico M:

a) M = conjunto dos números reais; A = {números racionais}.

b) $M = \mathfrak{B}(X; R)$; A_a = {funções limitadas $f : X \to R$ tais que $f(a) > 0$ para $a \in X$ fixo}.

c) M = {números reais}, $f \in \mathfrak{F}(R; R)$ e $A_f = \{x \in R;\ f(x) > 0\}$.

d) $M = R^n$; $A = \{x \in R^n; x^1 \text{ inteiro} > 0\}$.

e) $M = R^2$; A = {pontos do plano que não estão no círculo $x^2 + y^2 = 1$ nem no eixo dos x}.

f) M = {números inteiros}; $A = \{x \in M;\ |x - 2| = 3\}$.

g) $M = R$; $A = \{x \in M;\ x \geq -3\}$.

h) $M = \mathfrak{B}(R; R)$; $A = \{f \in M.\ f$ é descontínua em todos os pontos da reta$\}$.

i) $M = \mathfrak{C}_0([a, b]; R)$; $A = \left\{ f \in M;\ \int_a^b f(x)dx > 0 \right\}$.

j) $M = R^5$; $A = \{$pontos que têm exatamente 3 coordenadas $> 0\}$.

2. Sejam X um conjunto e $f: X \to R^m$ uma aplicação. Se $f(X)$ fôr aberto em R^m então $|f(x)|$ não atinge um valor máximo para $x \in X$. Que se pode dizer do mínimo de $|f(x)|$? Vale um resultado análogo para qualquer espaço normado, em lugar de R^m?

3. Seja $A = \{(x, y) \in R^2; x \neq y$ ou $y = 0\}$. A interseção de A com qualquer reta horizontal ou vertical é aberta nessa reta, mas A não é um subconjunto aberto do plano.

4. Mostre que a Prop. 1 dêste capítulo e a Prop. 1 do Cap. II são corolários da Prop. 5 dêste capítulo.

5. Num espaço vetorial normado E, nenhum subespaço vetorial $L \neq E$ (e portanto nenhuma variedade afim $a + L \neq E$) pode conter uma bola aberta de E.

6. Num espaço métrico M, a bola fechada $D(a; r)$ é a interseção de tôdas as bolas abertas $B(a; r + t)$, $t > 0$, que a contém. Vale ainda $D(a; r) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(a; r + 1/n)$. Anàlogamente, $B(a; r) = \bigcup_{\epsilon > 0} D(a_0; r - \epsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(a; r - 1/n)$.

7. Todo aberto não-vazio $A \subset R^n$ contém pelo menos um ponto $x = (x^1, \ldots, x^n)$ cujas coordenadas $x^1, \ldots, x^n$ são racionais. Concluir que se $\mathfrak{C}$ é uma coleção de abertos dois a dois disjuntos em R^n, então $\mathfrak{C}$ é enumerável. Como conseqüência, mostrar que se $I \subset R$ é um intervalo e $f: I \to R$ é uma função monótona, então o conjunto dos pontos $x \in I$ nos quais f é descontínua é enumerável.

8. Seja $I = [a, b]$ e indiquemos com $C^1(I)$ o espaço vetorial das funções contínuas (limitadas) $f: I \to R$ que possuem derivada contínua em todos os pontos $x \in I$. Mostre que $|f|^* = \sup.\{|f(x)| + |f'(x)|; x \in I\}$ é uma norma em $\mathfrak{C}^1(I)$ e que a aplicação linear $D: C^1(I) \to \mathfrak{C}_0([a, b]; R)$, definida por $D(f) = f' =$ derivada de f, é contínua. Dado $x_0 \in I$ é aberto o conjunto $A = \{f \in C^1(I); f'(x_0) > 0\}$. É contínua a função $\varphi: \mathfrak{C}^1(I) \to R$, definida por $\varphi(f) = \int_a^b f'(x)dx$? Seriam D contínua e A aberto ainda se tomássemos em $C^1(I)$ a norma $|f| = \sup.\{|f(x)|; x \in I\}$?

9. No espaço $\mathfrak{C}_0(I; R)$, $I = [a, b]$, o conjunto B das funções biunívocas $f: I \to R$ não contém bola alguma de raio > 0. E no espaço $\mathfrak{C}^1(I)$, definido no exercício anterior?

10. No espaço $R^{2n} = R^n \times R^n$ seja A o conjunto dos pares (x, y) (onde $x, y \in R^n$) tais que x e y são linearmente independentes (isto é, não se tem $x = \lambda y$ para algum $\lambda \in R$). Mostre que A é aberto em R^{2n}. Generalize.

11. Determine tôdas as topologias que se podem definir num conjunto com 2 elementos. Idem com 3 elementos. Quais delas são de Hausdorff?

12. Seja D o conjunto dos números *diádicos*, isto é, números da forma $k/2^n$, onde k, n são inteiros. Para todo aberto não-vazio $A \subset R$, tem-se $A \cap D$ não-vazio.

13. Tôda aplicação contínua $f: X \to Y$ de um espaço discreto X num espaço topológico X é contínua. Se, porém, Y é discreto, então f é contínua se, e sòmente se, X é uma reunião de abertos, dois a dois disjuntos, em cada um dos quais f é constante.

14. Seja X um conjunto linearmente ordenado. Dados $a, b \in X$ com $a < b$, o *intervalo aberto* (a, b) é o conjunto dos $x \in X$ tais que $a < x < b$. A fim de permitir que o primeiro elemento de X — quando tal elemento existir — pertença a algum intervalo aberto, admitiremos também entre os intervalos abertos os conjuntos da forma

$(\leftarrow, b) = \{x \in X; x < b\}$. Declare um subconjunto $A \subset X$ *aberto* quando, para cada $x \in A$, existe um intervalo aberto (a, b) com $x \in (a, b) \subset A$. Mostre que os abertos assim definidos constituem uma topologia para X, chamada a *topologia da ordem*. Mostre que, se X é a reta real, essa topologia coincide com a usual. Para qualquer X, mostre que a topologia da ordem é sempre de Hausdorff.

15. Seja Z um conjunto não-enumerável bem ordenado dotado de último elemento. Indiquemos com Ω o menor elemento de Z tal que o conjunto $X = \{x \in Z; x \leq \Omega\}$ é não-enumerável. Considere em X a topologia da ordem. Mostre que Ω não é um ponto isolado em X mas, para todo subconjunto enumerável $E \subset X$, existe um aberto A em X, com $\Omega \in A$ e $A \cap E = \varnothing$. Conclua que X é um espaço de Hausdorff não metrizável.

16. Seja S um subespaço do espaço topológico X. Se uma aplicação $f : X \to Y$ fôr contínua num ponto $x \in S$, a restrição $f|S : S \to Y$ será contínua no ponto x. Mas pode acontecer que $f|S$ seja contínua em todos os pontos de S sem que $f : X \to Y$ seja contínua em ponto algum. Se S fôr aberto em X, o segundo fato não ocorre.

17. Seja $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ uma função estritamente crescente, contínua no ponto 0, tal que $f(0) = 0$ e $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$. Dado um espaço métrico (M, d), pondo $d'(x, y) = f(d(x, y))$ obtém-se uma métrica em M, equivalente a d. Obtenha exemplos de uma tal função f.

18. Seja a topologia de S induzida pela aplicação $f : S \to X$. Supondo X metrizável, S será metrizável se, e sòmente se, f fôr biunívoca. Supondo X Hausdorff, S será Hausdorff se, e sòmente se, f fôr biunívoca.

19. Uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua se, e sòmente se, a topologia de X é mais fina do que a induzida por f. Se f fôr contínua e biunívoca, f será um homeomorfismo de X sôbre $f(X)$ se, e sòmente se, a topologia de X coincidir com a induzida por f.

20. Se S tem a topologia induzida por $f : S \to X$ então uma aplicação $g : Z \to S$ é contínua se, e sòmente se, $f \circ g : Z \to X$ é contínua. Em particular, se $S \subset X$ é um subespaço e $g : Z \to X$ é uma aplicação tal que $g(Z) \subset S$, então $g : Z \to X$ é contínua se, e sòmente se, considerada como uma aplicação de Z em S, g é contínua.

21. Se a topologia de X é induzida pela aplicação $f : X \to Y$ então todo aberto $A \subset X$ é saturado pela relação de equivalência $f(x) = f(x')$. Assim, a topologia induzida trata as imagens inversas $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, como se fôssem pontos. Em particular, se $f : X \to Y$ é sôbre Y e X tem a topologia induzida por f então f é aberta e, portanto, Y tem a topologia co-induzida por f.

22. Preencha os detalhes do seguinte resumo:

O exercício acima indica que se $f : S \to X$, não é biunívoca, a topologia induzida por f em S é grosseira. O mesmo não ocorrerá se considerarmos várias aplicações $f_1 : S \to X_1, \ldots, f_n : S \to X_n$, onde os X_i são espaços topológicos. Chamemos de *aberto elementar* em S uma interseção $A = f_1^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap f_n^{-1}(U_n)$ onde $U_1 \subset X_1, \ldots, U_n \subset X_n$ são abertos. A interseção de dois abertos elementares é ainda um aberto elementar e todo ponto $x \in S$ pertence a algum dêles. Logo, os abertos elementares formam a base de uma topologia em S, chamada a topologia induzida pelas aplicações f_i. Relativamente à topologia induzida, cada $f_i : S \to X_i$ é contínua. Se as aplicações f_i "separam" os pontos de S (isto é, dados $x \neq y$ em S, existe f_i tal que $f_i(x) \neq f_i(y)$) e cada X_i é de Hausdorff, então a topologia induzida em S pelas f_i é de Hausdorff. Uma aplicação $g : Z \to S$ é contínua se, e sòmente se, as aplicações $f_i \circ g : Z \to X_i$ são tôdas contínuas.

23. Sejam X, Y espaços topológicos e $f: X \to Y$ contínua. Diz-se que f é *compatível* com uma relação de equivalência E em X quando xEx' implica $f(x) = f(x')$ (isto é, f é constante em cada classe de equivalência segundo E). Se f é compatível com E, existe uma única aplicação $\overline{f}: X / E \to Y$ tal que $\overline{f} \circ \varphi = f$, onde $\varphi: X \to X/E$ é a aplicação quociente. A aplicação $\overline{f}$ diz-se obtida de f "por passagem ao quociente". Mostre que $\overline{f}$ é contínua.

24. No intervalo fechado $I = [0, 1]$ seja E a relação de equivalência que identifica 0 com 1 mas os demais pontos são equivalentes apenas a si próprios. A aplicação quociente $\varphi: I \to I/E$ não é aberta. A aplicação exponencial $\xi: I \to S^1$, dada por $\xi(t) = (\cos 2\pi t, \operatorname{sen} 2\pi t)$, é compatível com a relação E e a aplicação $\overline{\xi}: I/E \to S^1$, obtida por passagem ao quociente, é um homeomorfismo. Deduzir a existência de uma correspondência biunívoca entre as aplicações contínuas $f: I \to X$ tais que $f(0) = f(1)$ e as aplicações contínuas arbitrárias $\overline{f}: S^1 \to X$.

25. No quadrado $I \times I = \{(s, t) \in R^2,\ 0 \leq s \leq 1,\ 0 \leq t \leq 1\}$ seja E a relação de equivalência que identifica cada ponto $(s, 0)$ com $(s, 1)$ e cada ponto $(0, t)$ com $(1, t)$, deixando intactos os pontos do interior de $I \times I$. Mostre que o espaço quociente $(I \times I)/E$ é homeomorfo ao toro $T^2 = S^1 \times S^1$. Generalize para n dimensões.

26. Considere o cilindro $S^1 \times R$, e a aplicação $\zeta: R^2 \to S^1 \times R$, dada por $\zeta(s, t) = (\xi(s), t)$, onde $\xi(s) = (\cos 2\pi s, \operatorname{sen} 2\pi s)$. Mostre que ζ é um homeomorfismo local e conclua que o cilindro $S^1 \times R$ é naturalmente homeomorfo ao espaço quociente R^2/E, onde E é a relação de equivalência tal que $(s, t)E(s', t') \Leftrightarrow s - s' \in Z$.

27. Na esfera S^n, seja E a relação de equivalência que identifica cada ponto $x \in S^n$ com seu antípoda $-x$. Obtenha uma aplicação contínua e biunívoca $f: S^n/E \to P^n$, onde P^n é o espaço projetivo, definido no Exerc. 15, Cap. I. Mostre que $\pi: S^n \to P^n$ é um homeomorfismo local e que $f: S^n/E \to P^n$ é um homeomorfismo.

28. Sejam X um espaço topológico e G uma coleção de homeomorfismos de X que formam um grupo em relação à composição (isto é, se $g, h \in G$ então $g \circ h \in G$ e se $g \in g$ então $g^{-1} \in G$). A *órbita* de um ponto $x \in X$ relativamente ao grupo G é o conjunto $G(x) = \{g(x); g \in G\} \subset X$. Defina em X uma relação de equivalência cujas classes de equivalência são as órbitas dos pontos de X segundo G. Indique com X/G o espaço quociente. Mostre que a aplicação quociente $\varphi: X \to X/G$ é aberta. Suponha que G é um grupo *pròpriamente descontínuo*, isto é, que para todo ponto $x \in X$ existe um aberto U contendo x, com $U \cap g(U) = \varnothing$ para todo $g \in G$, $g \neq$ identidade. Isto implica que $g(U)$ e $h(U)$ são disjuntos sempre que $g \neq h$, $g, h \in G$. Nestas condições, a aplicação quociente $\varphi: X \to X/G$ é um homeomorfismo local. Os toros T^n, o espaço projetivo P^n e o cilindro $S^1 \times R$ são casos particulares desta situação.

29. Seja $f: X \to Y$ um homeomorfismo local. A imagem inversa $f^{-1}(y)$ de cada ponto $y \in Y$, é um subespaço discreto de S. Dadas aplicações contínuas $g, h: Z \to X$ tais que $f \circ g = f \circ h$, então $\{z \in Z; g(z) = h(z)\}$ é um subconjunto aberto de Z. Um "levantamento" de uma aplicação contínua $g: Z \to Y$ é uma aplicação contínua $\tilde{g}: Z \to X$ tal que $f \circ \tilde{g} = g$. Conclua que, se Z fôr conexo, e Y fôr de Hausdorff, dois levantamentos de $g: Z \to Y$ que coincidam num ponto $z_0 \in Z$ coincidirão em todos os pontos de Z.

30. Considere a seguinte "folheação" do plano. Preencha a faixa aberta $-1 < x < 1$ com os gráficos das funções $f_a(x) = (1 - x^2)^{-1} + a$, onde $a \in R$ é arbitrário. Preen-

cha o complementar dessa faixa com as retas verticais x = constante. Seja E a relação de equivalência cujas classes são as curvas abaixo. Mostre que o espaço quociente R^2/E não é de Hausdorff.

31. Sejam $A = \{(x, 0); x \leq -1\}$, $B = \{(x, 0); x \geq 1\}$, $C = \{(0, y); y > 0\}$ e R a reta real. Escreva $S = A \cup B \cup C$ e defina uma aplicação $f: S \to R$ pondo $(x, 0) = 1 + x$ para $(x, 0) \in A$, $f(x, 0) = 1 - x$ para $(x, 0) \in B$ e $f(0, y) = y$ para $(0, y) \in C$. Sejam τ_1 e τ_2 as topologias induzidas em $A \cup C$ e $B \cup C$, respectivamente, pelas restrições $f|(A \cup C)$ e $f|(B \cup C)$. Indiquemos com τ a topologia em S gerada por τ_1 e τ_2. Os abertos de τ são as reuniões $U \cup V$, onde $U \in \tau_1$ e $V \in \tau_2$. Relativamente a τ, $f: A \cup C \to R$ e $f: B \cup C \to R$ são homeomorfismos, de modo que S é a reunião de dois subespaços de Hausdorff abertos: $A \cup C$ e $B \cup C$. Em particular, S é um espaço "localmente de Hausdorff": todo ponto de S pertence a um aberto que é um espaço de Hausdorff. Mas (S, τ) não é de Hausdorff. Mais precisamente, (S, τ) é homeomorfo ao espaço quociente R^2/E do exercício anterior.

32. Se $f_1: X_1 \to Y_1, \ldots, f_n: X_n \to Y_n$ são aplicações abertas, então $f = f_1 \times \ldots \times f_n: X_1 \times \ldots \times X_n \to X_1 \times \ldots \times Y_n$, definida por $f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n))$ é aberta. Dadas as relações de equivalência E em X e F em Y, define-se a relação $E \times F$ em $X \times Y$ pondo-se $(x, y) E \times F (x', y')$ se, e sòmente se, xEx' e yFy'. Se E e F são relações abertas, então $(X \times Y)/(E \times F)$ é homeomorfo a $(X/E) \times (Y/E)$.

33. O gráfico de uma aplicação contínua $f: X \to Y$, tem interior vazio no produto $X \times Y$, desde que Y não possua pontos isolados.

34. Defina a topologia determinada por uma pseudométrica d. Mostre que ela é de Hausdorff se, e sòmente se, d fôr uma métrica.

35. Dê exemplo de um subconjunto discreto da reta, que não é fechado em R. Exiba também um subespaço $M \subset R$ onde se tem $B(a; r) \neq \text{int.} D(a; r)$ para um certo $a \in M$ e $r > 0$.

36. Sejam $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B}'$ respectivamente bases de abertos nos espaços topológicos X e X'. Para que uma aplicação $f : X \to X'$ seja contínua no ponto $a \in X$ é necessário e suficiente que, para cada aberto básico $B' \in \mathfrak{B}'$, com $f(a) \in B'$, exista um aberto básico $B \in \mathfrak{B}$, tal que $f(B) \subset B'$. Anàlogamente, $f : X \to X'$ é contínua se, e sòmente se, para cada aberto básico $B' \in \mathfrak{B}'$, $f^{-1}(B')$ é aberto em X. Finalmente, $f : X \to X'$ é aberta se, e sòmente se, para cada aberto básico $B \in \mathfrak{B}$, $f(B)$ é aberto em X'.

37. Seja (A_λ), $\lambda \in L$, uma família qualquer de abertos no espaço topológico X, com $X = \bigcup A_\lambda$. Uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua se, e sòmente se, para cada $\lambda \in L$, a restrição $f | A_\lambda : A_\lambda \to Y$ é contínua. Continuará verdadeiro o resultado se, em vez de supor os A_λ abertos, admitimos apenas que $X = \bigcup \text{int.}(A_\lambda)$? E se supusermos que os A_λ são todos fechados em X?

38. Para que X seja um espaço de Hausdorff, é necessário e suficiente que a diagonal $\Delta = \{(x, y) \in X \times X; x = y\}$ seja um subconjunto fechado de $X \times X$. Outra condição equivalente é que cada ponto $x \in X$ seja a interseção de tôdas as vizinhanças fechadas de x.

39. Seja X um espaço topológico. A *função característica* de um subconjunto $S \subset X$ é a função $\xi_S : X \to R$ tal que $\xi_S(x) = 1$ se $x \in S$ e $\xi_S(x) = 0$ se $x \notin S$. A fronteira de S é o conjunto dos pontos de descontinuidade de ξ_S.

40. Completar os detalhes da seguinte demonstração de que $p_1 : X \times Y \to X$ é uma aplicação aberta. Seja $A \subset X \times Y$ aberto. Para cada $y \in Y$, $A_y = (X \times y) \cap A$ é aberto em $X \times y$. Como $p_1 : X \times y \to X$ é um homeomorfismo, $p_1(A_y)$ é aberto em X e portanto $p_1(A) = \bigcup_{y \in Y} p_1(A_y)$ é aberto em X. Generalizar para n fatôres.

41. Em qualquer espaço topológico, tem-se int. $\text{int.}(S) = \text{int.}(S)$, $\text{int.}(S \cap T) = \text{int.}(S) \cap \text{int.}(T)$ e $\text{int.}(S) \cup \text{int.}(T) \subset \text{int.}(S \cup T)$. Dê um exemplo (na reta) onde $\text{int.}(S) \cup \text{int.}(T) \neq \text{int.}(S \cup T)$.

42. Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação tal que $f^{-1}(\text{int.}\, T) \subset \text{int.}\, f^{-1}(T)$, para todo $T \subset Y$. Então, f é contínua. E a recíproca?

43. As vizinhanças de um ponto x num espaço topológico X gozam das seguintes propriedades:

1) tôda vizinhança de x contém x;
2) todo conjunto que contém uma vizinhança de x é ainda uma vizinhança de x;
3) a interseção de duas (e portanto de um número finito qualquer de) vizinhanças de x é uma vizinhança de x;
4) tôda vizinhança V de x contém uma vizinhança W de x com a propriedade de que W é uma vizinhança qualquer dos seus pontos.

Recìprocamente, suponhamos que a cada ponto x de um conjunto X foi associada uma coleção $\mathfrak{B}(x)$ de partes de X de modo que as 4 propriedades acima sejam válidas. Declaremos um subconjunto $A \subset X$ aberto quando, para cada $x \in A$, existe um $V \in \mathfrak{B}(x)$ tal que $x \in V \subset A$. Os abertos assim definidos constituem uma topologia para X, relativamente à qual, para todo $x \in X$, a coleção $\mathfrak{B}(x)$ é a coleção das vizinhanças de x.

44. O *exterior* de um conjunto S num espaço topológico X é o conjunto ext.$(S) = \{x \in X;$ existe A aberto, com $x \in A \subset X - S\}$. Tem-se ext.$(S) =$ int.$(X - S)$. Em particular, ext.(S) é aberto. Para cada $S \subset X$, vale $X =$ int.$(S) \cup$ fr.$(S) \cup$ ext.(S), reunião disjunta. Em particular, fr.(S) é fechada e fr.$(S) =$ fr.$(X - S)$. Tem-se ainda int.(fr.$(S)) = \varnothing$.

45. Seja $M(n)$ o conjunto das matrizes quadradas reais com n linhas e n colunas. Estabeleça uma correspondência biunívoca entre $M(n)$ e o espaço euclidiano R^{n^2}. Por meio dessa correspondência, torne $M(n)$ um espaço métrico. As aplicações det.: $M(n) \to R$ e $m : M(n) \times M(n) \to M(n)$, definidas por det.$(X)$ = determinante da matriz X e $m(X, Y) = X \cdot Y$ = produto matricial de X por Y, são contínuas. O conjunto $G(n)$ das matrizes $n \times n$ que possuem inversa é aberto em $M(n)$. A aplicação $r : G(n) \to G(n)$, definida por $r(X) = X^{-1}$, é contínua. O conjunto $O(n)$ das matrizes ortogonais (isto é, matrizes cuja inversa é igual à transposta) é limitado e fechado em $M(n)$. O conjunto $G^+(n)$ das matrizes cujo determinante é > 0 é aberto e fechado em $G(n)$. Será $G^+(n)$ fechado em $M(n)$?

46. Sejam $f, g : X \to Y$ aplicações contínuas do espaço topológico X no espaço de Hausdorff Y. O conjunto dos pontos $x \in X$ tais que $f(x) = g(x)$ é fechado em X. É essencial que Y seja de Hausdorff?

47. Seja $M = \{(x, 0) \in R^2;\ 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0, y) \in R^2;\ 0 \leq y \leq 1\}$ com a métrica induzida por $|(x, y) - (x', y')| = \text{máx.}\ \{|x - x'|, |y - y'|\}$. Em M, o fecho da bola aberta de raio 1 e centro $(0, 1)$ não é a bola fechada de mesmo centro e raio.

48. Para todo subconjunto não-vazio S de um espaço métrico M e todo ponto $a \in M$, tem-se $d(a, S) = d(a, \overline{S})$.

49. Seja $M = R^2 - \{0\}$. Em M, os dois intervalos $(0, 1]$ do eixo das abscissas e do eixo das ordenadas são fechados, disjuntos, a uma distância nula um do outro. Também os conjuntos $F = \{1, 2, 3, \ldots\}$ e $G = \{1\ 1/2, 2\ 1/3, 3\ 1/4, \ldots\}$ são subconjuntos fechados na reta, com $F \cap G = \varnothing$ e $d(F, G) = 0$. Em ambos os casos, obtenha abertos disjuntos contendo os fechados disjuntos.

50. Seja F um subconjunto fechado não-vazio de um espaço métrico M. Para cada inteiro $n > 0$, seja $A_n = B(F; 1/n) = \{x \in M; d(x, F) < 1/n\}$. Então, $F = \cap A_n$, mostrando que todo fechado num espaço métrico é um "conjunto G_δ", isto é, uma interseção enumerável de abertos. Por passagem ao complementar, resulta que todo aberto num espaço métrico é um "conjunto F_σ", isto é, uma reunião enumerável de fechados.

51. Sejam X, Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua se, e sòmente se, para cada $S \subset X$, tem-se $f(\overline{S}) \subset \overline{f(S)}$.

52. O fecho de um conjunto num espaço topológico X goza das seguintes propriedades:

1) $\overline{\varnothing} = \varnothing$;
2) $S \subset \overline{S}$;
3) $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$;
4) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$.

Estas propriedades implicam (sem retornar à definição) que se $S \subset T$ então $\overline{S} \subset \overline{T}$ e que $\overline{S \cap T} \subset \overline{S} \cap \overline{T}$. Recìprocamente, seja X um conjunto. Suponhamos definida entre as partes de X uma aplicação $S \to \overline{S}$ gozando das 4 propriedades acima. Defina um subconjunto $A \subset X$ como aberto se $\overline{X - A} = X - A$. Mostre que se

obtém assim uma topologia em X; relativamente à qual o fecho de um subconjunto $\overline{S}$ S coincide com o conjunto $\overline{S}$ dado inicialmente.

53. Seja $(S_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família arbitrária de subconjuntos de um espaço topológico X. Pondo $S = \bigcup S_\lambda$, tem-se $\bigcup \overline{S}_\lambda \subset \overline{S}$. Tomando os S_λ como pontos, vê-se que é possível ter $\bigcup \overline{S}_\lambda \neq \overline{S}$.

54. Uma família $(S_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de um espaço topológico X chama-se *localmente finita* quando todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança que intersecta apenas um número finito de conjuntos S_λ. Tôda família finita é localmente finita. No plano, para $n = 1, 2, \ldots$, sejam $S_n = \{(x, y) \in R^2;\ x^2 + y^2 \leq n\}$ e $T_n = R^2 - S_n$. Examine as famílias (S_n) e (T_n) quanto à possibilidade de serem localmente finitas. Se a família $(S_\lambda)_{\lambda \in L}$ é localmente finita, pondo-se $S = \bigcup S_\lambda$, tem-se $\overline{S} = \bigcup \overline{S}_\lambda$. Em particular, a reunião de uma família localmente finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado. Seja $(S_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família localmente finita de partes fechadas $S_\lambda \subset X$ tais que $X = \bigcup S_\lambda$. Uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua se, e sòmente se, para cada $\lambda \in L$, $f|S_\lambda : S_\lambda \to Y$ é contínua. Se (S_λ) é localmente finita, $(\overline{S}_\lambda)$ também é.

55. Sejam X um espaço topológico e S um subespaço de X. Uma *retração* $r : X \to S$ é uma aplicação contínua de X sôbre S tal que $r(x) = x$ para todo $x \in S$. Diz-se então que S é um *retrato* de X. Um ponto é um retrato de todo espaço que o contém. Todo retrato de um espaço de Hausdorff é um subconjunto fechado dêsse espaço. Um retrato de um espaço conexo é conexo. Assim, por exemplo, o conjunto $\{0, 1\}$, fronteira do intervalo $[0, 1]$ na reta, não é um retrato dêsse intervalo. Um teorema famoso, devido a L. Brower, afirma que a esfera S^{n-1} não é um retrato da bola D^n. S é um retrato de X se, e sòmente se, $S \subset X$ e tôda aplicação contínua $f : S \to Y$ estende-se a uma aplicação contínua $\overline{f} : S \to Y$ (isto é, $\overline{f}|S = f$). Dado $p \in S^{n-1}$, definir uma retração de $D^n - p$ sôbre $S^{n-1} - p$.

56. Sejam $S_1 \subset X_1, \ldots, S_n \subset X_n$. Mostre que $\overline{S_1 \times \ldots \times S_n} = \overline{S}_1 \times \ldots \times \overline{S}_n$.

57. Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua de X sôbre Y. A fim de que f seja fechada é necessário e suficiente que, para todo ponto $y \in Y$ e todo aberto U em X com $f^{-1}(y) \subset U$, exista um aberto V em Y tal que $y \in V$ e $f^{-1}(V) \subset U$.

58. Seja $\varphi : X \to X/E$ uma aplicação quociente. Para que φ seja fechada é necessário e suficiente que o saturamento de todo subconjunto fechado de X seja fechado. Uma condição equivalente é que todo aberto U, contendo uma classe de equivalência C, deve conter também um aberto saturado V, com $C \subset V \subset U$.

59. Para que, no espaço quociente X/E, todo ponto seja um subconjunto fechado, é necessário e suficiente que tôda classe de equivalência segundo E seja fechada em X. O Exerc. 31 mostra que, mesmo se a relação E é aberta, esta condição é necessária mas não suficiente para que X/E seja um espaço de Hausdorff.

60. Seja $G = \{(x, y) \in X \times X; xEy\}$ o *gráfico* da relação de equivalência E. Se X/E fôr um espaço de Hausdorff, então G é um subconjunto fechado de $X \times X$. Se $G \subset X \times X$ fôr fechado então todo ponto em X/E é fechado mas não se pode garantir que X/E seja um espaço de Hausdorff, mesmo quando X o é. Se $G \subset X \times X$ fôr fechado e a relação E fôr aberta então X/E é de Hausdorff.

61. Sejam $A_1, \ldots, A_n$ abertos num espaço normal X, tais que $X = A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Existem abertos $B_1, \ldots, B_n$ em X tais que $\overline{B}_1 \subset A_1, \ldots, \overline{B}_n \subset A_n$ e $X = B_1 \cup \ldots \cup B_n$.

Generalizar para uma amília enumerável localmente finita (*cf.* Exerc. 54) com $X = A_1 \cup \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$. A hipótese "localmente finita" pode ser enfraquecida? Eliminada?

62. Seja X o espaço topológico obtido modificando-se a topologia do intervalo $[0, 1]$ do seguinte modo. Consideramos os intervalos da forma $[0, a) \subset [0, 1]$ e de cada um dêles retiramos os pontos $1/n$, $n = 0$ inteiro, obtendo assim o intervalo *modificado* $[0, a)^*$. A topologia de X terá sua base formada pelos abertos usuais de $[0, 1]$ e mais os intervalos modificados. X é um espaço de Hausdorff que possui uma base enumerável mas não é normal. Em particular, X não é metrizável.

63. Seja X o espaço definido no Exerc. 15. X e $X \times X$ são espaços de Hausdorff normais. Mas o subconjunto aberto $Y = X \times X - \{(\Omega, \Omega)\}$ do quadrado $X \times X$ não é normal. Com efeito, os subconjuntos disjuntos $F = (X \times \{\Omega\}) \cap Y$ e $G = (\{\Omega\} \times \times X) \cap Y$ são fechados em Y mas não estão contidos em abertos disjuntos.

64. Um espaço normal é de Hausdorff se, e sòmente se, cada um dos seus pontos é um conjunto fechado.

65. Para tôda função contínua $f : [0, 1] \to [0, 1]$ existe um ponto $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$.

66. Um espaço métrico conexo contendo mais de um ponto não é enumerável. Segue-se que todo espaço métrico enumerável é totalmente desconexo.

67. Considere os subespaços 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 do plano R^2. Mostre que entre êles existem exatamente cinco tipos homeomorfamente distintos. Quais dêsses espaços são homogêneos? (Um espaço topológico X diz-se *homogêneo* quando, dados $x, y \in X$ arbitrários, existe um homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(x) = y$.) Dê duas respostas, conforme os pontos extremos dessas figuras são considerados como pertencentes a elas ou não.

68. Todo subconjunto aberto da reta se exprime, de modo único, como reunião enumerável de intervalos abertos disjuntos. (Vide Exerc. 7.)

69. Seja C_0 o conjunto das funções contínuas $f : [0, 1] \to R$ tais que $f(0) = f(1) = 0$. Um número $a \in [0, 1]$ chama-se uma *corda* da função f quando existe $x \in [0, 1]$ tal que $x + a \in [0, 1]$ e $f(x + a) = f(x)$. (Isto significa que o gráfico de f possui uma corda horizontal de comprimento a.) Um número $a \in [0, 1]$ chama-se uma *corda universal* quando a é uma corda de tôda função $f \in C_0$. Mostre que as cordas universais são precisamente os números 0, 1, 1/2, 1/3, ...

70. O grupo $G(n)$ das matrizes reais $n \times n$ com determinante $\neq 0$ é desconexo. Suas componentes conexas são $G^+(n) = \{X \in G(n);\ \det.(X) > 0\}$ e $G^-(n)$, definida anàlogamente. (Vide Exerc. 45.)

71. Sejam X um espaço topológico e E a relação de equivalência em X cujas classes de equivalência são as componentes conexas de X. O espaço quociente X/E é totalmente desconexo. Se X fôr localmente conexo, a aplicação quociente $\varphi : X \to X/E$ é aberta e X/E é discreto.

72. Um espaço topológico X é conexo se, e sòmente se, para cada par de pontos $x, y \in X$, existe um subconjunto conexo $C \subset X$ tal que $x \in C$ e $y \in C$.

73. Para que um espaço topológico X seja conexo é necessário e suficiente que tôda aplicação contínua de X num espaço discreto seja constante.

74. Seja E um subconjunto enumerável de R^n, $r > 1$. Dados $x \neq y$ quaisquer em $R^n - E$, seja L uma reta em R^n que não contém x nem y. Existe um ponto $a \in L$ tal que a poligonal $[x, a] \cup [a, y]$ está contida em $R^n - E$. Conclua que o complementar de qualquer subconjunto enumerável de R^n $(n > 1)$ é conexo por caminhos. Assim, R não é homeomorfo a R^n, $n > 1$.

75. O gráfico de uma aplicação contínua definida num espaço conexo é conexo. Recíproca?

76. As letras I, X, Y e o plano são duas a duas não homeomorfas.

77. O produto cartesiano $X \times Y$ é conexo se, e sòmente se, cada um dos fatôres X, Y é conexo.

78. Seja X um espaço topológico. Uma função real $f : X \to R$ diz-se *semicontínua inferiormente* no ponto $a \in X$, quando, para cada $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança V de a tal que $x \in V$ implica $f(a) - \epsilon < f(x)$. De modo análogo se define semicontinuidade superior. Seja $f : R \to R$ a função definida por $f(x) = (x + 1) \text{ sen } \dfrac{1}{x}$ para $x \neq 0$ e $f(0) = a$. Se fôr $a \leq -1$, f é semicontínua inferiormente no ponto 0. Se $a \geq 1$, então f é semicontínua superiormente no ponto 0. Mas se $-1 < a < +1$, então f não é semicontínua no ponto 0. Uma função é contínua se, e sòmente se, é semicontínua inferior e superiormente. A fim de que $f : X \to R$ seja semicontínua inferiormente, é necessário e suficiente que, para cada $a \in R$, o conjunto $X_a = \{x \in X;\ f(x) > a\}$ seja aberto em X. Um subconjunto $S \subset X$ é aberto se, e sòmente se, sua função característica ξ_S é semicontínua inferiormente. Anàlogamente, S é fechado em X se, e sòmente se, $\xi_S : X \to R$ é semicontínua superiormente. (Vide Exerc. 39.) Os intervalos abertos $(a, +\infty)$, $a \in R$, formam a base de uma topologia em R relativamente à qual as funções contínuas são as funções semicontínuas inferiormente $f : X \to R$ no sentido usual. Anàlogamente para os intervalos $(-\infty, a)$. Sejam X um espaço topológico e M um espaço métrico. Dada uma aplicação $f : X \to M$, define-se uma função real $\omega_f : X \to R$ pondo, para cada $x \in X$, $\omega_f(x) =$ ínfimo dos diâmetros $\delta[f(U)]$, onde U percorre as vizinhanças de x. (Oscilação de f no ponto x.) A função ω_f é semicontínua superiormente. Concluir que o conjunto dos pontos de continuidade de uma função real $f : X \to R$ é um G_δ. (Vide Exerc. 50.) Em particular, o conjunto dos números irracionais é um G_δ na reta.

79. *Grupos topológicos.* Preencha os detalhes da exposição seguinte. Um *grupo topológico* G é um espaço topológico, munido de uma estrutura de grupo tal que as aplicações $m : G \times G \to G$ e $r : G \to G$, definidas por $m(x, y) = x \cdot y$ e $r(x) = x^{-1}$, são contínuas.

A reta R ou, mais geralmente, qualquer espaço vetorial normado E, é um grupo topológico (comutativo) relativamente à adição $(x, y) \to x + y$. O conjunto R^* dos números reais $\neq 0$ e o conjunto C^* dos números complexos $\neq 0$ são grupos topológicos relativamente à multiplicação. Todo subgrupo de um grupo topológico é um grupo topológico, quando considerado com a topologia induzida. Assim, o conjunto R^+ dos reais > 0 e o círculo unitário S^1, subgrupos (multiplicativos) de R^* e C^* respectivamente, são grupos topológicos. O grupo $G(n)$ das matrizes reais invertíveis $n \times n$ é um grupo topológico e as matrizes ortogonais formam um subgrupo $O(n) \subset G(n)$. Se G e H são grupos topológicos

então $G \times H$, com a topologia produto e a estrutura de grupo dada por $(g, h) \cdot (g', h') = (gg', hh')$, é um grupo topológico. Em particular, $R^n = R \times \ldots \times R$, os toros $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$, o cilindro $S^1 \times R$ são grupos topológicos.

Num grupo topológico G, para cada $g \in G$ podemos definir a translação à direita $\delta_g : G \to G$, $\delta_g(x) = xg$, e a translação à esquerda $\lambda_g : G \to G$, $\lambda_g(x) = g \cdot x$. Para todo $g \in G$, as translações δ_g e λ_g são homeomorfismos de G. Também é um homeomorfismo de G a aplicação $r : G \to G$ tal que $r(x) = x^{-1}$. Um grupo topológico é um espaço topológico homogêneo. (Vide Exerc. 67.) Em particular, $(0, \infty)$ é um grupo topológico relativamente à multiplicação de reais mas nenhuma operação pode tornar $[0, \infty)$ um grupo topológico. As vizinhanças de um ponto x num grupo topológico G são os conjuntos da forma $xV = \{x \cdot v; v \in V\}$ onde V é uma vizinhança arbitrária do elemento neutro e. (Podíamos ter feito uma afirmação análoga com $V \cdot x$.)

Num grupo topológico G, dada uma vizinhança U do elemento neutro e, existe uma vizinhança V de e tal que $VV^{-1} \subset U$, onde $VV^{-1} = \{xy^{-1};\ x, y \in V\}$. Para que um grupo topológico G seja um espaço da Hausdorff, é necessário e suficiente que o elemento neutro e seja um subconjunto fechado de G.

Dados dois grupos topológicos G, H, um homeomorfismo $\varphi : G \to H$ é contínuo se, e sòmente se, é contínuo no ponto $e \in G$ (e = elemento neutro I).

Seja H um subgrupo de grupo topológico G. A relação de equivalência $x \equiv y$ (mod. H) $\Leftrightarrow xy^{-1} \in H$ é aberta. O espaço quociente G/H é de Hausdorff se, e sòmente se, H é fechado em G. Se H é um subgrupo invariante, então G/H é um grupo topológico. Exemplo: $T^n = R^n/Z^n$. As seguintes afirmações acêrca de um subgrupo $H \subset G$ são equivalentes:

a) H é um subespaço discreto de G;

b) existe uma vizinhança V do elemento neutro $e \in G$ tal que $V \cap H = e$;

c) a aplicação quociente $\varphi : G \to G/H$ é um homemorfismo local.

Se G é um grupo topológico de Hausdorff, todo subgrupo discreto $H \subset G$ é fechado em G.

Todo subgrupo aberto de um grupo topológico é também fechado. Exemplo: o subgrupo $G^+(n) \subset G(n)$. (Vide exercício 45.) Um subgrupo ou tem interior vazio ou é aberto (e portanto fechado). Segue-se que um grupo topológico conexo é gerado por quaisquer vizinhanças do elemento neutro. Em qualquer grupo topológico, a componente conexa do elemento neutro é um subgrupo invariante fechado.

Limites

Capítulo IV

§ 1. Introdução

Estudaremos, neste capítulo, o conceito de limite. Daremos mais atenção aos limites de seqüências, que constituem um instrumento de grande utilidade para o estudo dos fenômenos topológicos nos espaços métricos. Mostraremos como funções contínuas, fechos, conjuntos fechados, abertos e pontos de acumulação se deixam caracterizar por meio de limites de seqüências em espaços métricos. Estudaremos em separado os limites de seqüências de funções e a noção de convergência uniforme. Diremos também algumas palavras sôbre os limites da forma $\lim_{x \to a} f(x)$. Finalmente, examinaremos os limites de seqüências em espaços topológicos não metrizáveis, chamando a atenção para o fato importante de que, se um espaço topológico não satisfaz ao chamado "primeiro axioma da enumerabilidade", então as propriedades topológicas locais nesse espaço não podem ser caracterizadas por meio de limites de seqüências. O exemplo por meio do qual exibimos êsse fenômeno é o espaço de tôdas as funções $f: R \to R$, com a topologia da convergência simples.

§ 2. Limite de uma Seqüência

Uma *seqüência* (ou uma *sucessão*) num conjunto X é uma aplicação definida no conjunto $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ dos números inteiros positivos e tomando valôres em X. A cada inteiro $n \in N$ a seqüência faz corresponder um elemento de X, que indicaremos com x_n e chamaremos o *n-ésimo têrmo* (ou *têrmo de ordem n*) da seqüência. A própria seqüência é indicada com as notações (x_n) ou $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$.

Deve-se distinguir a seqüência (x_n) — que é uma função — do seu *conjunto de valôres* $\{x_n; n = 1, 2, \ldots\}$. Pode acontecer que $x_m = x_n$ com $m \neq n$; na realidade, o conjunto de valôres de (x_n) pode até ser finito, como no caso extremo de uma *seqüência constante*, $x_n = a$ para $n = 1, 2, \ldots$, na qual o conjunto de valôres reduz-se ao único elemento a.

Uma *subseqüência* da seqüência (x_n) em X é uma restrição da aplicação $n \to x_n$ a um subconjunto *infinito* $N' = \{n_1 < n_2 < \ldots\}$ do conjunto $N = \{1, 2, \ldots\}$. Uma subseqüência é representada pelas notações (x_{n_k}), $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$ ou $(x_n)_{n \in N'}$.

Estritamente falando, a subseqüência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$ não parece ser uma seqüência em X, pois não é uma aplicação de N em X. Entretanto, (x_{n_k}) pode ser considerada, de modo natural, como a aplicação $1 \to x_{n_1}$, $2 \to x_{n_2}, \ldots, k \to x_{n_k}, \ldots$ e portanto como uma seqüência em X.

Uma seqüência (x_n), num espaço métrico M, diz-se *limitada* quando o conjunto dos seus valôres x_n fôr um subconjunto limitado de M. Por exemplo, tôda seqüência constante é limitada; a seqüência $x_n = n$, na reta, não é limitada.

Num espaço métrico M, diz-se que o ponto x é *limite da seqüência* (x_n) quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitràriamente, fôr possível obter $n_0 \in N$ tal que $n > n_0$ implique $d(x_n, x) < \epsilon$. Por exemplo, 0 é limite da seqüência $(1/n)$ de números reais, porque dado $\epsilon > 0$ arbitràriamente, é possível obter um inteiro $n_0 > 0$ tal que $n_0 \geq 1/\epsilon$. Então, $n > n_0$ implica $|1/n - 0| = 1/n < 1/n_0 < \epsilon$.

Quando x é limite da seqüência (x_n), diz-se também que x_n *tende para* x, ou que x_n *converge para* x, e indica-se êste fato com as notações $x_n \to x$, $x = \lim x_n$, $x = \lim_n x_n$ ou $x = \lim_{n \to \infty} x_n$.

Se o espaço métrico M possui pelo menos dois pontos distintos a e b, existem em M seqüências que não possuem limite, como por exemplo a seqüência definida por $x_n = a$ se n fôr ímpar e $x_n = b$ se n fôr par. Nenhum ponto $x \in M$ pode ser limite de (x_n) pois, tomando-se ϵ igual ao menor dos números $d(x, a)$ e $d(x, b)$ tem-se $\epsilon > 0$ mas a ϵ não corresponde nenhum inteiro n_0 que cumpra a condição $d(x_n, x) < \epsilon$ para todo $n > n_0$.

Uma seqüência que possui limite chama-se *convergente*; uma que não possui diz-se *divergente*.

Por exemplo, $(1/n)$ é uma seqüência convergente na reta R. Considerando o subespaço $P \subset R$ formado pelos números reais > 0, $(1/n)$ é uma seqüência divergente em P. [Se fôsse $1/n \to x \in P$, a seqüência $(1/n)$ teria dois limites, 0 e x, em R, contrariando a Prop. 2, a ser demonstrada logo a seguir.]

Proposição 1 — *Num espaço métrico* M, *tem-se* $\lim x_n = x$ *se, e sòmente se, para todo subconjunto aberto* A *contendo o ponto* x, *existe um índice* n_0 *tal que* $n > n_0$ *implica* $x_n \in A$.

Demonstração: De acôrdo com a definição, $\lim x_n = x$ significa que qualquer bola aberta $B(x; \epsilon)$, de centro x, contém todos os têrmos x_n cujos índices n são maiores do que um certo n_0 (obtido a partir do raio ϵ). Ora, se A é aberto e contém x, contém uma bola $B(x; \epsilon)$. Logo, se $x = \lim x_n$, os x_n pertencem a A a partir de uma certa ordem n_0. Recìprocamente, se esta condição é satisfeita para todo aberto contendo x, ela vale em particular para as bolas abertas $B(x; \epsilon)$ e portanto $\lim x_n = x$.

Corolário — *Num espaço métrico*, $\lim x_n = x$ *se, e sòmente se, para cada vizinhança* V *do ponto* x *existe um índice* n_0 *tal que* $x_n \in V$ *para todo* $n > n_0$.

A condição expressa pela Prop. 1 (ou pelo seu corolário) serve de definição de limite de uma seqüência num espaço topológico qualquer.

Num espaço métrico, $x = \lim x_n$ significa que tôda bola $B(x)$, de centro x, (e portanto todo aberto $A \ni x$ ou tôda vizinhança $V \ni x$) contém x_n para qualquer valor de n, com exceção de apenas um número finito dêles (que são $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$). Isto também se exprime dizendo que $x_n \in B(x)$ (ou $x_n \in A$, ou $x_n \in V$) para todo n suficientemente grande.

Observação — Para bem compreender os fatos relativos à convergência de seqüências, convém ter clara a diferença entre as seguintes afirmações a respeito de uma seqüência (x_n) num conjunto X:

a) Para todo n suficientemente grande, x_n goza de uma certa propriedade $\mathfrak{P}$.

b) Existem inteiros n arbitràriamente grandes tais que x_n goza da propriedade $\mathfrak{P}$.

O significado formal do enunciado *a*) é que existe um inteiro n_0 tal que x_n goza da propriedade $\mathfrak{P}$ para todo $n > n_0$. Por outro lado, *b*) significa que, dado qualquer $n_0 \in N$, existe um têrmo x_n, com índice $n > n_0$, que goza da propriedade $\mathfrak{P}$.

Em outras palavras: *b*) significa que o conjunto dos inteiros $n \in N$ tais que x_n goza da propriedade $\mathfrak{P}$ é infinito, enquanto *a*) afirma que êsse conjunto tem complementar finito em N. Evidentemente, *a*) implica *b*).

Por exemplo, num espaço métrico contendo os pontos $a \neq b$, sejam $x_1 = x_3 = x_5 = \ldots = a$ e $x_2 = x_4 = x_6 = \ldots = b$. Dada uma vizinhança qualquer de a, temos $x_n \in V$ para valôres arbitràriamente grandes de n. Por outro lado, se V fôr uma bola de centro a e raio $d(a, b)$, não é verdade que $x_n \in V$ para todo n suficientemente grande.

A propriedade seguinte, que decorre de ser M um espaço de Hausdorff, nos permitirá dizer "x é o limite de (x_n)" em vez de "x é um limite de (x_n)", como dissemos até agora.

Proposição 2 — (*Unicidade do limite*) — *Num espaço métrico M, uma seqüência convergente possui um único limite.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que exista uma seqüência (x_n) em M, com $\lim x_n = x$, $\lim x_n = y$ e $x \neq y$. Como M é um espaço de Hausdorff, existem vizinhanças $U \ni x$ e $V \ni y$ em M, tais que $U \cap V = \varnothing$. Sendo $x = \lim x_n$, existe $n_1 \in N$ tal que $x_n \in U$ para todo $n > n_1$. Anàlogamente, existe $n_2 \in N$ tal que $x_n \in V$ para todo $n > n_2$. Seja $n_0 = \text{máx.}\ \{n_1, n_2\}$. Para todo $n > n_0$ devemos ter simultâneamente $x_n \in U$ e $x_n \in V$, o que contradiz o fato de ser $U \cap V = \varnothing$.

Proposição 3 — *Para que uma seqüência $(x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)$, num espaço métrico M, possua uma subseqüência convergente para um ponto $a \in M$ é necessário e suficiente que tôda vizinhança de a contenha têrmos x_n com índices n arbitràriamente grandes.*

Demonstração: Seja $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$ uma subseqüência de (x_n) convergindo para a. Tôda vizinhança $U \ni a$ contém os x_{n_k} com exceção, no máximo, de $x_{n_1}, \ldots, x_{n_{k_0}}$. Logo, U contém têrmos x_n com índices $n = n_k$ arbitràriamente grandes. Reciprocamente, supondo válida esta propriedade, a bola $B(a; 1)$, de centro a e raio 1, conterá algum têrmo x_{n_1}; a bola $B(a; 1/2)$ conterá algum têrmo x_{n_2} com $n_2 > n_1$ e assim por diante; para cada $k \in N$ é possível escolher um $x_{n_k} \in B(a; 1/k)$, com $n_k > n_{k-1}$. Isto define um subconjunto infinito $N' = \{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\} \subset N$ e portanto uma subseqüência $(x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots)$ a qual tem a propriedade $d(x_{n_k}, a) < 1/k$, donde $x_{n_k} \to a$.

Proposição 4 — *Se $x_n \to a$, então tôda subseqüência de (x_n) converge para a.*

Demonstração: Evidente.

Segue-se da Prop. 4 que se uma seqüência (x_n) num espaço métrico possui duas subseqüências convergindo para limites distintos, então (x_n) é divergente. Em particular, se existir uma infinidade de valôres de n tais que $x_n = a$, então ou $x_n \to a$ ou x_n diverge.

Se d e d' são métricas equivalentes em M, $x_n \to x$ segundo a métrica d se, e sòmente se, $x_n \to x$ segundo d'. Isto significa que "$x = \lim x_n$" é uma propriedade topológica, e resulta da Prop. 1.

EXEMPLOS

1. Seja $a \in M$ um ponto isolado. Então, $x_n \to a$ se, e sòmente se, existe $n_0 \in N$ tal que $x_n = a$ para todo $n > n_0$. Em particular, as únicas

seqüências convergentes num espaço métrico discreto são aquelas que, a partir de uma certa ordem, tornam-se constantes.

2. Uma seqüência de números reais x_n converge para um número real x se, e sòmente se, para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in N$ tal que $m > n_0$ implica $x - \epsilon < x_n < x + \epsilon$. A convergência de uma seqüência num espaço métrico reduz-se à convergência de números reais, pois $x_n \to x$ se, e sòmente se, a seqüência de números reais $d(x_n, x)$ converge para 0.

3. Tôda seqüência convergente num espaço métrico M é limitada. Com efeito, se $\lim x_n = x \in M$ então, tomando $\epsilon = 1$, vemos que existe $n_0 \in N$ tal que, exceto talvez os pontos $x_1, \ldots, x_{n_0}$, todos os demais x_n estão contidos na bola $B(x; 1)$. Assim, o conjunto dos valôres da seqüência (x_n) está contido na reunião $\{x_1, \ldots, x_{n_0}\} \cup B(x; 1)$ e portanto é limitado. A recíproca é evidentemente falsa.

4. Diz-se que uma seqüência (x_n) de números reais é *não-decrescente* quando $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots$, isto é, $m < n$ implica $x_m \leq x_n$. Quando isto se dá, pondo-se $a = \sup. \{x_n; n = 1, 2, \ldots\}$, tem-se $a = \lim x_n$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, pela definição de sup., existe $n_0 \in N$ tal que $a - \epsilon < x_{n_0} \leq a$. Mas $n > n_0$ implica $x_n \geq x_{n_0}$. Logo, $n > n_0$ implica $a - \epsilon < x_n \leq a$, o que prova ser $\lim x_n = a$. Evidentemente, resultado análogo vale para seqüências *não-decrescentes*.

5. Seja $x = \sup. X$, onde X é um conjunto não-vazio de números reais limitado superiormente. Existe uma seqüência de números reais $x_n \in X$ (a qual podemos supor não-decrescente, se fôr preciso) tal que $\lim x_n = x$. Com efeito, pela definição de sup., existe $x_1 \in X$ tal que $x - 1 < x_1 \leq x$. Seja agora $n > 1$ e suponhamos que tenham sido definidos $x_1, \ldots, x_{n-1}$, pertencentes a X, de modo que $x - 1/i < x_i \leq x$, $i = 1, \ldots, n-1$. Novamente, pela definição de sup., existe $x_n' \in X$ tal que $x - 1/n < x_n' \leq x$. Seja $x_n = \text{máx.} \{x_n', x_{n-1}\}$. Então, $x_n \in X$, $x_n \geq x_{n-1}$ e $x - 1/n < x_n \leq x$. Fica, então definida indutivamente uma seqüência não-decrescente de números $x_n \in X$ com $0 \leq x - x_n < 1/n$, donde $\lim x_n = x$. (Note-se que, se $x \in X$, podemos tomar todos os $x_n = x$.) Anàlogamente, se $y = \inf. X$, existe uma seqüência (não-crescente, se quisermos) de números $y_n \in X$ com $\lim y_n = y$. Em particular, dado um subconjunto não-vazio limitado A, de um espaço métrico M, existem seqüências de pontos $x_n, y_n \in A$ tais que $\lim d(x_n, y_n) = \delta(A)$. [Note-se que (x_n) nem (y_n) precisam ser seqüências convergentes em M.] Anàlogamente, dado $a \in M$, existe uma seqüência de pontos $a_n \in A$ com $\lim_n d(a_n, a) = d(a, A)$. Finalmente, dados $A, B \subset M$, existem seqüencias de pontos $a_n \in A$, $b_n \in A$ com $d(a_n, b_n) \to d(A, B)$. Novamente, nem (a_n), nem (b_n) precisam convergir em M.

6. Seja $P^* = \{0, 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$ considerado com a métrica induzida da reta. Todo ponto de P^* é um ponto isolado, com a exceção de 0. As vizinhanças de 0 em P^* são os complementares dos subconjuntos finitos de P^* que não contêm o zero. Dada uma seqüência (x_n) num espaço métrico M, tem-se $\lim x_n = x \in M$ se, e sòmente se, a aplicação $f : P^* \to M$, definida por $f(1/n) = x_n$, $f(0) = x$, fôr contínua. Com efeito, sendo os demais pontos de P^* isolados, basta examinar a continuidade de f no ponto 0, a qual evidentemente equivale a $\lim x_n = x$.

7. Seja (x_n) uma seqüência convergente de números reais. Se $x_n \geq 0$ para todo n suficientemente grande, então $\lim x_n \geq 0$. Com efeito, seja $x = \lim x_n$. Se fôsse $x < 0$, existiria um intervalo $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ consistindo inteiramente de números negativos. Mas, para todo n suficientemente grande, $x_n \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$ o que contradiz $x_n \geq 0$. (Note-se que, mesmo admitindo-se $x_n > 0$ para todo n, não se pode concluir $\lim x_n > 0$.) Resultado análogo vale para $x_n \leq 0$. Ficou mostrado também que se $\lim x_n = x < 0$ existe $n_0 \in N$ tal que $n > n_0$ implica $x_0 < 0$. Semelhantemente, para $x > 0$.

8. Resulta diretamente da definição de limite que uma seqüência $(x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots)$, num espaço métrico M, converge para um ponto $x \in M$ se, e sòmente se, fixado arbitràriamente $p \in N$, a seqüência $(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+n}, \ldots)$ converge para x. Escreve-se então $\lim x_n = \lim\limits_n x_{p+n}$ e diz-se que a convergência e o valor do limite não se alteram quando se abandonam da seqüência, ou a ela se acrescentam, um número finito de têrmos.

9. Sejam $(x_n), (y_n)$ seqüências convergentes num espaço vetoria normado E e (λ_n) uma seqüência convergente de escalares. Então, as seqüências $(x_n + y_n)$ e $(\lambda_n x_n)$ são convergentes em E, valendo $\lim (x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n$ e $\lim (\lambda_n x_n) = (\lim \lambda_n) \cdot (\lim x_n)$. Além disso, se $\lim \lambda_n \neq 0$, então $\lim (1/\lambda_n) = 1/(\lim \lambda_n)$.

Observação — Se $\lim \lambda_n \neq 0$, tem-se $\lambda_n \neq 0$ para todo n suficientel mente grande. Abandonando-se eventualmente os têrmos $\lambda_n = 0$, que são em número finito, não se altera a convergência de (λ_n) e $1/\lambda_n$ tem sentido.

A demonstração dêstes fatos pode ser feita diretamente, ou combinando a Prop. 2 do Cap. II com o Ex. 6 acima. Por exemplo, no caso de $x_n + y_n$, as aplicações $f, g : P^* \to E$, definidas por $f(1/n) = x_n$, $f(0) = \lim x_n$, $g(1/n) = y_n$, $g(0) = \lim y_n$, são contínuas e portanto $f + g : P^* \to E$ é contínua. Mas $(f + g)(1/n) = x_n + y_n$ e $(f + g)(0) = \lim x_n + \lim y_n$. Logo, $x_n + y_n$ converge para $\lim x_n + \lim y_n$.

10. Seja a um número real, com $0 < |a| < 1$. Então, $\lim\limits_{n \to \infty} a^n = 0$. Basta demonstrar no caso em que $0 < a < 1$ porque $|a^n| = |a|^n$ e a defi-

nição de $\lim |x_n| = 0$ é idêntica à de $\lim x_n = 0$. Se $0 < a < 1$, segue-se que $a > a^2 > a^3 \ldots$ e portanto existe o limite $l = \lim_{n\to\infty} a^n$. Pelo Ex. 9, $al = a(\lim a^n) = \lim (a^{n+1}) = l$, isto é, $l(a - 1) = 0$. Como $a \neq 1$, segue-se que $l = 0$.

11. Seja $M = M_1 \times \ldots \times M_k$ um produto de espaços métricos. Dar uma seqüência (x_n) em M equivale a dar k seqüências de coordenadas: $(x_{n1})_{n\in N}$ em $M_1, \ldots, (x_{nk})_{n\in N}$ em M_k, de modo que $x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nk})$. Seja $a = (a_1, \ldots, a_k) \in M$. Tem-se $\lim x_n = a$ se, e sòmente se, para cada $i = 1, \ldots, k$, tem-se $\lim_n x_{ni} = a_i$. Com efeito, de acôrdo com o Ex. 6 e com a Prop. 3 do Cap. II, as seguintes afirmações são equivalentes:

1.°) $\lim x_n = a$;

2.°) a aplicação $f : P^* \to M$, definida por $f(1/n) = x_n$, $f(0) = a$, é contínua;

3.°) para $i = 1, 2, \ldots, k$, as aplicações $f_i : P^* \to M$, definidas por $f_i(1/n) = x_{ni}$, $f_i(0) = a_i$, são contínuas;

4.°) para $i = 1, 2, \ldots, k$, tem-se $\lim_n x_{ni} = a_i$.

Em particular, uma seqüência de pontos $x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k) \in R^k$ converge para um ponto $a = (a^1, a^2, \ldots, a^k) \in R^k$ se, e sòmente se, $\lim_{n\to\infty} x_n^i = a^i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, k$.

12. *Séries.* Seja (x_n) uma seqüência de pontos num espaço vetorial normado E. Para cada $n \in N$ podemos formar a *soma parcial* $S_n = x_1 + \ldots + x_n \in E$. Se existir o limite $\lim_{n\to\infty} S_n$, diremos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, ou simplesmente Σx_n é *convergente* e sua *soma* será, por definição, igual a $\lim S_n$. Se o limite das somas parciais não existir, diremos que Σx_n é uma série *divergente*. Por exemplo, para $E = R$ ou C, se $|a| < 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n + \ldots$, chamada *série geométrica* de razão a, é convergente e sua soma é igual a $1/(1 - a)$. Com efeito, para cada $n = 1, 2, \ldots$, temos a identidade:

$$1 - a^n = (1 - a)(1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}) = (1 - a) S_n$$

Logo, $S^n = (1 - a^n)/(1 - a)$. Segue-se que $\lim_{n\to\infty} S_n = 1/(1 - a)$. Se uma série x_n é convergente, tem-se $\lim x_n = \lim (S_{n+1} - S_n) = \lim S_{n+1} - \lim S_n = 0$. Isto é, o têrmo geral x_n de uma série convergente tem limite zero. A recíproca é falsa. Com efeito, demonstra-se em Cálculo que a série $\Sigma_n(1/n^\alpha) = 1 + 1/2^\alpha + 1/3^\alpha + \ldots$ é convergente para $\alpha > 1$ e divergente para $\alpha \leq 1$. Assim, por exemplo, se $\alpha = 2$, obtemos que $1 + 1/4 +$

$+ 1/9 + 1/16 + \ldots$ é convergente mas, para $\alpha = 1$, a série "harmônica" $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots$ é divergente, apesar de seu têrmo geral $1/n$ tender para zero.

§ 3. Topologia e Convergência

Neste parágrafo, mostraremos como exprimir conceitos topológicos através da noção de limite de uma seqüência. Iniciaremos com a formulação do conceito de função contínua.

Proposição 5 — *Sejam M e N espaços métricos. Para que uma aplicação $f : M \to N$ seja contínua no ponto $a \in M$ é necessário e suficiente que $x_n \to a$ em M implique $f(x_n) \to f(a)$ em N.*

Demonstração: Seja f contínua no ponto a. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implica $d(f(x), f(a)) < \epsilon$. Se $x_n \to a$, existe n_0 tal que $n > n_0$ implica $d(x_n, a) < \delta$. Logo, $n > n_0$ implica $d(f(x_n), f(a)) < \epsilon$ e portanto $f(x_n) \to f(a)$. A condição é, pois, necessária. Recìprocamente, se f não fôr contínua no ponto a, existe $\epsilon > 0$ tal que, qualquer que seja $\delta > 0$, há sempre pontos $x \in M$ que distam de a menos que δ enquanto a distância de $f(x)$ a $f(a)$ é maior do que ou igual a ϵ. Tomando δ sucessivamente igual a $1, 1/2, 1/3, \ldots$ obtemos os pontos $x_1, x_2, x_3, \ldots$ tais que $d(x_n, a) < 1/n$ e $d(f(x_n), f(a)) \geq \epsilon$. Em suma, supondo que f não é contínua no ponto a, foi-nos possível obter uma seqüência (x_n) convergindo para a e tal que $(f(x_n))$ não converge para $f(a)$. Logo, a condição é suficiente.

Corolário 1 — *Para que $f : M \to N$ seja contínua no ponto $a \in M$ é suficiente que $x_n \to a$ implique que $(f(x_n))$ seja convergente em N.*

Com efeito, esta hipótese acarreta que, para tôda (x_n) convergindo para a, $(f(x_n))$ deve convergir para $f(a)$. Pois se tivéssemos $f(x_n) \to b \neq f(a)$, a seqüência (z_n), tal que $z_{2m-1} = x_m$ e $z_{2m} = a$ $(m = 1, 2, \ldots)$, converge para a, mas $f(z_n)$ tem duas subseqüências, uma convergindo para $b \in N$ e outra convergindo para $f(a)$. Logo, $(f(z_n))$ não é convergente.

Corolário 2 — *Para que $f : M \to N$ seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem $(f(x_n))$ de tôda seqüência convergente (x_n) em M seja uma seqüência convergente em N.*

Escólio — *A fim de que $f : M \to N$ seja contínua no ponto $a \in M$ é suficiente que, para tôda seqüência (x_n) em M convergindo para a, $(f(x_n))$ admita uma subseqüência convergindo para $f(a)$.*

Com efeito, se f não fôr contínua no ponto a, a demonstração da Prop. 5 fornece uma seqüência $x_n \to a$, tal que $(f(x_n))$ não possui subseqüência alguma convergindo para $f(a)$.

Em seguida, caracterizaremos o fecho de um conjunto.

Proposição 6 — *Seja S um subconjunto de um espaço métrico M. Para que $x \in \bar{S}$ em M é necessário e suficiente que x seja limite de uma seqüência de pontos $x_n \in S$.*

Demonstração: Se $x = \lim x_n$, com $x_n \in S$ para todo n, então qualquer vizinhança V de x contém pontos de S, pois $x_n \in V$ para todo n suficientemente grande. Logo, $x \in \bar{S}$. Recìprocamente, se $x \in \bar{S}$ então, para cada $n = 1, 2, \ldots$ podemos escolher um ponto x_n de S na bola aberta $B(x; 1/n)$. Obtemos assim uma seqüência de pontos $x_n \in S$, com $d(x, x_n) < 1/n$ e portanto $x = \lim x_n$.

Corolário 1 — *Um ponto $x \in M$ pertence à fronteira de S se, e sòmente se, $x = \lim x_n$, $x_n \in S$ e $x = \lim y_n$, $y_n \in M - S$.*

Com efeito, fr. $(S) = \bar{S} \cap \overline{M - S}$.

Corolário 2 — *Sejam $f, g : M \to N$ aplicações contínuas. Dado $S \subset M$, se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in S$, então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \bar{S}$.*

Com efeito, dado $x \in \bar{S}$, temos $x = \lim x_n$, $x_n \in S$ e portanto $f(x) = \lim f(x_n) = \lim g(x_n) = g(x)$.

Proposição 7 — *Para que um subconjunto F de um espaço métrico M seja fechado, é necessário e suficiente que êle contenha o limite de tôda seqüência convergente de pontos $x_n \in F$.*

Demonstração: Para que F seja fechado, é necessário e suficiente que $F \supset \bar{F}$. Mas, pela Prop. 6, $\bar{F}$ é o conjunto dos limites das seqüências (x_n) com $x_n \in F$.

Proposição 8 — *Seja M um espaço métrico. Para que um subconjunto $A \subset M$ seja aberto é necessário e suficiente que tôda seqüência (x_n) que converge para um ponto $a \in A$ tenha $x_n \in A$ para todo n suficientemente grande.*

Demonstração: A necessidade da condição é expressa pela Prop. 1. Recìprocamente, supondo satisfeita a condição, se $x_n \in M - A$ para todo n e $x_n \to x$, então x não pode pertencer a A, logo, $x \in M - A$. Assim, $M - A$ é fechado (Prop. 7) e portanto A é aberto.

Proposição 9 — *Seja M um espaço métrico. Para que $x \in M$ seja ponto de acumulação de um subconjunto $S \subset M$ é necessário e suficiente que exista uma seqüência de pontos $x_n \in S$, com $x_n \to x$ e $x_m \neq x_n$ para $m \neq n$.*

(Isto se exprime dizendo que x é limite de uma seqüência de pontos distintos pertencentes a S.)

Demonstração: Suponhamos que $x \in S'$. A bola aberta $B_1 = B(x; 1)$ contém um ponto $x_1 \in S$, $x_1 \neq x$. A bola aberta B_2, de centro x e raio

igual a min. $\{1/2, d(x, x_1)\}$, contém um ponto $x_2 \in S$, $x_2 \neq x$ e (necessàriamente) $x_2 \neq x_1$. Prosseguindo anàlogamente obteremos, para todo $n \in N$, uma bola aberta B_n, de centro x e raio igual a min. $\{1/n, d(x, x_{n-1})\}$, a qual contém um ponto $x_n \in S$ tal que $x_n \neq x$ e $x_n \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}\}$. Chega-se assim a uma seqüência de pontos $x_n \in S$, com $x_m \neq x_n$ para $m \neq n$, e $d(x, x_n) < 1/n$, donde $x_n \to x$. Recìprocamente, se existe uma tal seqüência tendendo para x, então qualquer vizinhança V de x contém x_n para todo n suficientemente grande. Como os x_n são dois a dois distintos, podemos garantir que existe em V algum ponto de S diferente de x, e portanto $x \in S'$.

EXEMPLO

13. Seja X um conjunto não-vazio de números reais limitado superiormente. Se X fôr fechado na reta, então $\sup. X \in X$. Com efeito, pelo Ex. 5, existe uma seqüência de pontos $x_n \in X$ com $\lim x_n = \sup. X$. Pela Prop. 7, isto implica $\sup. X \in X$. Anàlogamente, todo subconjunto $X \subset R$, fechado, não-vazio e limitado inferiormente contém o seu ínfimo.

§ 4. Seqüências de Funções

Seja X um conjunto qualquer e M um espaço métrico. Diz-se que uma seqüência de aplicações $f_n : X \to M$ converge *simplesmente* para uma aplicação $f : X \to M$ quando, para cada $x \in X$, a seqüência $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots)$, de pontos $f_n(x) \in M$, converge para o ponto $f(x) \in M$.

Assim, $f_n \to f$ simplesmente se, e sòmente se, para cada $x \in X$ e cada $\epsilon > 0$ existe um número inteiro positivo $n_0 = n_0(x, \epsilon)$ (que depende não sòmente do ϵ dado, mas também do ponto x considerado) tal que $n > n_0(x, \epsilon)$ implica $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$.

Diz-se que $f_n \to f$ *uniformemente* quando, dado $\epsilon > 0$, fôr possível obter $n_0 = n_0(\epsilon)$ (dependendo apenas do ϵ) tal que $n > n_0$ implica $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$, seja qual fôr $x \in X$.

É evidente que se $f_n \to f$ uniformemente, então, $f_n \to f$ simplesmente. Mas a recíproca é falsa, como mostra o exemplo que se segue.

EXEMPLO

14. Seja $X = [0, 1]$ e, para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$, seja $f_n : [0, 1] \to R$ definida por $f_n(x) = x^n$. Para cada x fixo, com $0 \leq x < 1$, temos $\lim_n f_n(x) = 0$ (Cf. Ex. 10). Se $x = 1$, temos $\lim_n f_n(x) = 1$. Segue-se que f_n converge simplesmente para a função $f : [0, 1] \to R$ definida por $f(x) = 0$,

se $0 \leq x < 1$, e $f(1) = 1$. Mas essa convergência não é uniforme. Com efeito, dado ϵ, com $0 < \epsilon < 1$, por maior que seja n, existirão sempre pontos x no intervalo $[0, 1]$ tais que $f_n(x) - f(x) \geq \epsilon$. Basta tomar x de tal modo que $1 > x > \sqrt[n]{\epsilon}$. Então, $|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n > \epsilon$.

Por outro lado, dado $1 > \delta > 0$ arbitrário, seja $Y = [0, 1-\delta]$ o intervalo fechado de extremos 0 e $1 - \delta$. Para cada $n = 1, 2, \ldots$, seja $g_n : Y \to R$ a restrição da função f_n ao intervalo Y. Isto é, $g_n(x) = x^n$, $0 \leq x \leq 1 - \delta$. A seqüência (g_n) converge uniformemente em Y para a função idênticamente nula $g : Y \to R$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, como $0 < 1 - \delta < 1$, existe um $n_0 \in N$ tal que $(1 - \delta)^n < \epsilon$ para todo $n > n_0$. Mas se $x \in Y$, então $0 \leq x^n \leq (1-\delta)^n$. Logo, $n > n_0$ implica $0 \leq x^n < \epsilon$ qualquer que seja $x \in Y$ e portanto $x^n \to 0$ uniformemente em Y.

Mostraremos agora como se pode interpretar a convergência uniforme de aplicações com convergência de pontos num espaço métrico conveniente.

Sejam X um conjunto arbitrário, M um espaço métrico e (f_n) uma seqüência de aplicações de X em M. Seja ainda $f : X \to M$ uma aplicação.

Proposição 10 — *Se $f_n \to f$ uniformemente, então, para todo n suficientemente grande, f_n está a uma distância finita de f e $f_n \to f$ no espaço $\mathfrak{B}_f(X; M)$. Recìprocamente, se $f_n \to f$ em $\mathfrak{B}_f(X; M)$ então, f_n converge uniformemente para f.*

Demonstração: Se $f_n \to f$ uniformemente, tomado $\epsilon = 1$, vemos que existe n_1 tal que $n > n_1$ implica $d(f_n(x), f(x)) < 1$ para todo x. Logo, qualquer que seja $n > n_1$ fixado, $d(f_n, f) = \sup.\{d(f_n(x), f(x)); x \in X\} \leq 1$ e portanto f_n está a uma distância finita de f. Para mostrar que $f_n \to f$ em $\mathfrak{B}_f(X; M)$, tomemos $\epsilon > 0$. Existe n_0 tal que $n > n_0$ implica $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon/2$ para todo $x \in X$ e portanto $d(f_n, f) = \sup.\{d(f_n(x), f(x)); x \in X\} \leq \epsilon/2 < \epsilon$ para todo $n > n_0$. A recíproca é imediata: se $f_n \to f$ em $\mathfrak{B}_f(X; M)$, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in N$ tal que $n > n_0$ implica $d(f_n, f) = \sup.\{d(f_n(x), f(x)); x \in X\} < \epsilon$. Logo, $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ para todo $x \in X$ e portanto f_n converge uniformemente para f.

Corolário — *O limite de uma seqüência uniformemente convergente de aplicações limitadas $f_n : X \to M$ é uma aplicação limitada $f : X \to M$. Tem-se $f_n \to f$ uniformemente se, e sòmente se, $f_n \to f$ como pontos do espaço $\mathfrak{B}(X; M)$.*

Observação — Se $f_n \to f$ simplesmente, pode-se ter cada f_n limitada sem que f o seja. Por exemplo, para cada $n \in N$ seja $f_n : R \to R$ a função definida assim: $f_n(x) = x$ para $|x| \leq n$ e $f_n(x) = n$ para $|x| > n$. Então, (f_n) converge simplesmente para a função $f : R \to R$, $f(x) = x$. Cada f_n é limitada mas f não é. Isto mostra, em particular, que f_n não converge uniformemente para f em R.

Proposição 11 — *Sejam X um espaço topológico, M um espaço métrico e (f_n) uma seqüência de aplicações de X em M convergindo uniformemente para uma aplicação $f : X \to M$. Se cada f_n é contínua num dado ponto $a \in M$, então f é contínua no ponto a.*

Primeira demonstração: Dado $\epsilon > 0$, podemos obter um inteiro n_1 tal que $d(f_{n_1}(x), f(x)) < \epsilon/3$ seja qual fôr $x \in X$. Sendo f_{n_1} contínua no ponto a, existe uma vizinhança V de a em X tal que $d(f_{n_1}(x), f_{n_1}(a)) < \epsilon/3$, para todo $x \in V$. Por conseguinte, para todo $x \in V$, temos: $d(f(x), f(a)) \leq$ $\leq d(f(x), f_{n_1}(x)) + d(f_{n_1}(x), f_{n_1}(a)) + d(f_{n_1}(a), f(a)) < \epsilon$ e portanto f é contínua no ponto a.

Segunda demonstração: O subconjunto de $\mathfrak{B}_f(X; M)$ formado pelas aplicações que são contínuas no ponto a é fechado. (Prop. 17, Cap. III.) As Props. 7 e 10 dêste capítulo implicam então que f é contínua no ponto a.

Introduziremos agora uma noção de convergência para seqüências de funções, a qual contém como casos particulares a convergência simples e a convergência uniforme.

Dados um conjunto X e um espaço métrico M, fixemos uma coleção $\mathfrak{S}$ de partes de X. Diz-se que uma seqüência de aplicações $f_n : X \to M$ converge para uma aplicação $f : X \to M$ *uniformemente nos conjuntos de* $\mathfrak{S}$ quando, para cada $S \in \mathfrak{S}$, a seqüência das restrições $f_n | S : S \to M$ converge uniformemente para a restrição $f | S : S \to M$. Isto significa que, para cada $S \in \mathfrak{S}$ e cada $\epsilon > 0$, existe um inteiro $n_0 = n_0(S, \epsilon)$ tal que $n > n_0$ implica $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ para todo $x \in S$.

EXEMPLOS

15. Seja $\mathfrak{S}$ a coleção das partes de X reduzidas a pontos. Então, $f_n \to f$ uniformemente nos conjuntos de $\mathfrak{S}$ se, e sòmente se, $f_n \to f$ simplesmente. Por outro lado, se $\mathfrak{S}$ consiste apenas de uma parte,

X, então a convergência uniforme nos conjuntos de $\mathfrak{S}$ é a convergência uniforme em X.

16. No Ex. 14, seja $\mathfrak{S}$ a coleção dos intervalos fechados $[0, 1 - \delta]$, $0 < \delta < 1$. Então, $f_n(x) = x^n$ converge para 0 uniformemente nos conjuntos de $\mathfrak{S}$.

17. (Vide observação seguinte ao Corolário da Prop. 10.) Seja $f_n : R \to R$ definida por $f_n(x) = x$ se $|x| \leq n$ e $f_n(x) = n$ se $|x| > n$. Tomando $\mathfrak{S}$ = coleção dos intervalos finitos $[a, b]$, vê-se que (f_n) converge uniformemente nos conjuntos de $\mathfrak{S}$ para a função $f(x) = x$. Com efeito, fixado $[a, b]$, existe um inteiro n_0 suficientemente grande para que $[a, b] \subset \subset [-n_0, n_0]$. Então, se $n > n_0$, $f_n(x) = x$, seja qual fôr $x \in [a, b]$.

18. No Ex. 11 do Cap. II, a seqüência de funções $\varphi_n : [a, b] \to R$ converge simplesmente para a função idênticamente nula no intervalo fechado $[a, b]$. (De fato, para todo $x \in [a, b]$, tem-se $\varphi_n(x) = 0$ para todo n suficientemente grande. Note-se que $\varphi_n(a) = 0$ para todo valor de n.) Mas, seja qual fôr a família $\mathfrak{S}$ de partes de $[a, b]$, se $\mathfrak{S}$ contiver uma vizinhança do ponto a, não será verdade que $\varphi_n \to 0$ uniformemente nos conjuntos de $\mathfrak{S}$ pois em qualquer vizinhança de a existem pontos x onde $\varphi_n(x) = n$, com n arbitràriamente grande.

19. Os exemplos acima mostram que uma seqüência de aplicações contínuas f_n pode convergir para uma aplicação contínua f sem que a convergência seja uniforme, mesmo num intervalo fechado $[a, b]$. Uma condição suficiente para a continuidade de $f = \lim f_n$, mais fraca do que a da Prop. 11 é a seguinte: dadas uma seqüência de aplicações contínuas $f_n : M \to N$ e uma aplicação $f : M \to N$, suponhamos que cada ponto $x \in M$ possua uma vizinhança V tal que $f_n|V$ converge uniformemente para $f|V$. (Diz-se, neste caso, que f_n converge uniformemente para f, localmente.) Então, $f : M \to N$ é contínua. Com efeito, $f|V$ é contínua e as vizinhanças V cobrem todos os pontos de M. Note-se que, mesmo esta condição mais fraca não é necessária para que $f = \lim f_n$ seja contínua, pois no Ex. 18, a condição não é satisfeita. (Vide Exerc. 24.)

20. Sejam $f : R \to R$ uma função e c um número real. Diz-se que f *tem limite c no infinito* quando, para cada $\epsilon > 0$, existe $k > 0$ tal que $|x| > k$ implica $|f(x) - c| < \epsilon$. Escreve-se, então $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = c$. Por exemplo, se $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$, tem-se $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$ e se $g(x) = e^{-1/x^2}$, $g(0) = 0$, tem-se $\lim_{|x| \to \infty} g(x) = 1$.

Se f tem limite c no infinito, a seqüência de funções $f_n(x) = f(x - n)$ converge uniformemente para a função constante $f(x) = c$ nos intervalos limitados $[a, b]$. Com efeito, fixado $[a, b]$ e dado $\epsilon > 0$ tal que $|y| > k$ implica $|f(y) - c| < \epsilon$. Ora, como $[a, b]$ é limitado, existe $n_0 \in N$ tal que $n > n_0$ implica $|x - n| > k$, seja qual fôr $x \in [a, b]$, e portanto $n > n_0$ implica $|f(x - n) - c| < \epsilon$ para todo x em $[a, b]$. Em particular, $1/[1 + (x - n)^2]$ converge uniformemente para 0 nos intervalos limitados e $\exp.(1/(x - n)^2)$ converge para 1, uniformemente nos intervalos limitados.

Observações — 1) Se $f_n \to f$ uniformemente em cada um dos subconjuntos $S_1, \ldots, S_k \subset X$, então $f_n \to f$ uniformemente em $S = S_1 \cup \ldots \cup S_k$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, existe, para cada $i = 1, \ldots, k$, um inteiro $n_i > 0$ tal que $n > n_i$ implica $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ para todo $x \in S_i$. Seja $n_0 = \text{máx.}\{n_1, \ldots, n_k\}$. Então, $n > n_0$ implica $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ para todo $x \in S$.

2) Se $f_n \to f$ uniformemente em S, então $f_n \to f$ uniformemente em qualquer parte de S.

3) Segue-se das duas observações acima que, ao considerar a convergência uniforme numa coleção $\mathfrak{S}$ de partes de um conjunto X, não há perda de generalidade em supor, sempre que fôr conveniente, que $\mathfrak{S}$ goza das seguintes propriedades: *a*) Tôda reunião finita de conjuntos de $\mathfrak{S}$ ainda pertence a $\mathfrak{S}$. *b*) Tôda parte de um conjunto de $\mathfrak{S}$ pertence a $\mathfrak{S}$. Com efeito, se $\mathfrak{S}$ não possui estas propriedades, podemos tomar a coleção $\mathfrak{S}'$, formada pelas reuniões finitas $S_1' \cup \ldots \cup S_k'$ de partes $S_i' \subset S_i$ de elementos de $\mathfrak{S}$. As convergências uniformes nos conjuntos de $\mathfrak{S}$ e de $\mathfrak{S}'$ coincidem, e $\mathfrak{S}'$ goza das propriedades acima estipuladas.

A Prop. 11 acarreta que os resultados gerais sôbre convergência em espaços métricos podem ser aplicados à convergência uniforme de funções, mediante o simples processo de considerar uma aplicação $f : X \to M$ como um ponto do espaço métrico $\mathfrak{B}_f(X; M)$. Um exemplo dêste método é fornecido pela segunda demonstração da Prop. 11.

Seria interessante também, para cada coleção $\mathfrak{S}$ de partes de X, obter um espaço métrico N, que contivesse como pontos de aplicações $f : X \to M$, e no qual a convergência segundo sua métrica coincidisse com a convergência uniforme nos conjuntos de $\mathfrak{S}$. No Cap. IX será mostrado que, se a família $\mathfrak{S}$ fôr enumerável, um tal espaço métrico N sempre existe. Quando $\mathfrak{S}$ não é enumerável, nem possui um subconjunto enumerável $\mathfrak{S}_0$ que origine a mesma noção de convergência uniforme, então a convergência uniforme nos conjuntos de $\mathfrak{S}$ corresponde à convergência de uma seqüência de pontos num espaço topológico não-metrizável. Por exemplo, a convergência simples de uma seqüência de funções $f_n : R \to R$ não pode ser obtida como

convergência de pontos num espaço métrico mas corresponde à convergência num espaço topológico não-metrizável. Por outro lado, a convergência uniforme de uma seqüência de funções $f_n : R \to R$ nos intervalos limitados $[a, b]$ é equivalente à convergência uniforme de (f_n) nos intervalos $[-n, +n]$, $n \in N$, os quais formam uma coleção enumerável $\mathfrak{S}$. Logo, esta convergência de funções corresponde à convergência de pontos num espaço métrico conveniente.

No § 6 dêste capítulo (vide Ex. 22), descreveremos uma topologia no espaço $\mathfrak{F}(R; R)$ de tôdas as funções reais de uma variável real, a qual dá origem à convergência simples. O mesmo exemplo será tratado, sob um ponto de vista bem mais geral, no Cap. IX. Para encerrar êste parágrafo, observaremos que existem outros tipos de convergência de seqüências de funções, além da convergência uniforme nas partes de uma coleção $\mathfrak{S}$. Por exemplo, no Cap. I (Ex. 16) e no Cap. II (Ex. 12), tivemos ocasião de considerar o espaço métrico cujos pontos são as (classes de equivalência de) funções integráveis $f : [a, b] \to R$. A convergência nesse espaço chama-se *convergência em* L^1. Assim, $f_n \to f$ em L^1 quando $\lim_{n \to \infty} \int_a^{b'} |f_n(x) - f(x)| dx = 0$. Já vimos que se f_n converge uniformemente para f então $f_n \to f$ em L^1. Mas a recíproca é falsa, como sabemos. As relações entre a convergência em L^1 e a convergência simples são estudadas em Análise, na Teoria da Integração.

Não insistiremos em outros exemplos de tipos de convergência de funções, em que pêse a importância dêsse tópico. Na realidade, um dos métodos mais poderosos da moderna Análise Matemática consiste em escolher, para cada problema, o tipo adequado de espaço de funções (isto é, o modo conveniente de convergência), considerar as funções dadas e as soluções procuradas do problema como pontos daquele espaço e aplicar as técnicas gerais da Topologia e da Análise Funcional.

§ 5. Limite de uma Função

Seja $f : M \to N$ uma aplicação do espaço métrico M no espaço métrico N. Dado um ponto $a \in M$, diz-se que o ponto $b \in N$ é o *limite de* $f(x)$ *quando* x *tende para* a, e escreve-se $b = \lim_{x \to a} f(x)$ quando para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta$ implica $d(f(x), b) < \epsilon$.

Se f fôr contínua no ponto a, ter-se-á evidentemente $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$. Recìprocamente, se existir $b = \lim_{x \to a} f(x)$ então, para todo $\epsilon > 0$, teremos $d(f(a), b) < \epsilon$, pois $d(a, a) < \delta$ seja qual fôr $\delta > 0$. Logo, $b = f(a)$ e f é

contínua no ponto a. Segue-se então que, apresentada dêste modo, a noção de limite é desnecessária porque coincide com a de continuidade no ponto a.

A utilidade da noção de limite reside no fato de que é possível definir $\lim_{x \to a} f(x)$ sem que a pertença necessàriamente ao domínio de f. Apresentemos essa definição em tôda sua generalidade.

Sejam A um subconjunto do espaço topológico X, $f : A \to Y$ uma aplicação definida em A e tomando valôres num espaço topológico Y e $a \in \bar{A}$ um ponto de X, aderente ao conjunto A. Diremos que o ponto $b \in Y$ é *limite de $f(x)$ quando x tende para a* se, para qualquer vizinhança V de b em Y, existir uma vizinhança U de a em X tal que $x \in U \cap A$ implica $f(x) \in V$. Escreve-se então $b = \lim_{x \to a} f(x)$. Às vêzes se encontra também a notação

$$b = \lim_{x \to a,\, x \in A} f(x)$$

mas em nosso caso, isto é desnecessário porque o domínio da aplicação f sendo o conjunto A, x não poderia estar fora de A. A notação $\lim_{x \to a} f(x)$ não acarreta ambigüidade, desde que se tenha sempre em mente o domínio de f.

Quando o espaço Y é de Hausdorff, verifica-se como na Prop. 2 que o limite, se existe, é único. Para espaços métricos, a definição de limite pode ser equivalentemente formulada em ϵ's e δ's: dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $x \in A$ e $d(x, a) < \delta$ implicam $d(f(x), b) < \epsilon$. Note-se que, como $a \in \bar{A}$, em tôda vizinhança de a existem sempre elementos de A.

É tradicional, em Análise, dada uma função $f : S \to R$, com $a \in S \subset R$, usar o símbolo $\lim_{x \to a} f(x)$ para significar o que chamaríamos aqui de $\lim_{x \to a} g(x)$, onde g é a restrição de f ao subconjunto $S - \{a\}$. Justifica-se, então, êste abuso de notação explicando-se que, ao calcular $\lim_{x \to a} f(x)$, "não é permitido à variável x assumir o valor a".

Um exemplo clássico é o da função $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, definida em $A = R - \{0\}$. Tem-se $0 \in \bar{A}$ e demonstra-se em Cálculo que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

Proposição 12 — *Sejam M, N espaços métricos, $A \subset M$, $f : A \to N$ e $a \in \bar{A}$. Para que exista $b = \lim_{x \to a} f(x)$ é necessário que $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = b$ para tôda seqüência de pontos $x_n \in A$ com $x_n \to a$ e é suficiente que $(f(x_n))$ seja convergente em N, sempre que $x_n \in A$, $x_n \to a$.*

Demonstração: A necessidade é óbvia. Suficiência: admitida a condição, notemos primeiramente que, sejam quais forem as seqüências de

pontos $x_n, y_n \in A$ com $x_n \to a$ e $y_n \to a$, temos $\lim f(x_n) = \lim f(y_n)$ pois, se fôsse $\lim f(x_n) \neq \lim f(y_n)$, construiríamos uma nova seqüência de pontos $z_n \in A$, pondo $z_{2n} = x_n$, $z_{2n-1} = y_n$ e teríamos $z_n \to a$ sem que $f(z_n)$ convergisse. Chamemos de $b \in N$ o valor comum dêsses limites $\lim f(x_n)$. Definamos uma aplicação $F : A \cup \{a\} \to N$ pondo $F(x) = f(x)$ se $x \in A$ e $F(a) = b$. Segue-se da Prop. 5 que F é contínua no ponto a. Em virtude da necessidade da condição, temos $\lim_{x \to a} F(x) = b$. Em particular, temos $\lim_{x \to a} f(x) = b$.

PROPOSIÇÃO 13 — *Sejam M, N espaços métricos, A um subespaço de M e $f : A \to N$ uma aplicação contínua. Se, para cada $a \in \overline{A}$, existir o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ então a aplicação $F : \overline{A} \to N$, definida por $F(a) = f(a)$ para $a \subset A$ e $F(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ para $a \in \overline{A} - A$, é contínua.*

Demonstração: Sejam $x_0 \in \overline{A}$ e $\epsilon > 0$ arbitrário. Existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), F(x_0)) < \epsilon/2$ desde que $x \in A$ e $d(x, x_0) < \delta$. Afirmamos que, para todo $a \in \overline{A}$ com $d(a, x_0) < \delta$, tem-se $d(F(a), F(x_0)) < \epsilon$. Com efeito, é $a = \lim x_n$ com $x_n \in A$ e podemos admitir que $x_n \in B(x_0; \delta)$ para todo n. (Vide Prop. 8.) Assim, $d(x_n, x_0) < \delta$ e portanto $d(f(x_n), F(x_0)) <$ $< \epsilon/2$ para todo n. Como $F(a) = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$, vem $d(F(a), F(x_0)) =$ $= \lim_{n \to \infty} d(f(x_n), F(x_0)) \leq \epsilon/2 < \epsilon$, como devíamos demonstrar. ...

OBSERVAÇÃO — Dada $f : A \to N$ contínua, não existe necessàriamente $\lim_{x \to a} f(x)$ para todo $a \in \overline{A}$. Por exemplo, $f(x) = \text{sen}(1/x)$ é contínua na semi-reta $(0, +\infty)$ mas não existe $\lim_{x \to 0} \text{sen}(1/x)$.

§ 6. Convergência em Espaços Não-Metrizáveis

Seja (x_n) uma seqüência num espaço topológico X. Diremos que (x_n) *converge* para o ponto $x \in X$, e escreveremos $x = \lim x_n$, quando, para todo aberto A contendo o ponto x, fôr possível obter um índice $n_0 \in N$ tal que $n > n_0$ implique $x_n \in A$.

Equivalentemente, pode-se substituir o aberto A contendo x por uma vizinhança de x.

No caso de espaços métricos, esta definição de limite de uma seqüência coincide com a que foi dada por meio da distância, como foi visto na Prop. 1.

Deve-se assinalar aqui, enfàticamente, que o conceito de limite de uma seqüência, embora tenha sentido em espaços topológicos arbitrários, não é

suficientemente forte para caracterizar as noções topológicas nesses espaços. No caso geral, deve-se recorrer a instrumentos da convergência mais poderosos, como os *filtros* [Bourbaki] e os *nets* [Kelley].

A adequabilidade dos limites de seqüências para caracterizar os fechos, as funções contínuas etc. em espaços métricos, deve-se ao fato de que em tais espaços cada ponto possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças.

Um *sistema fundamental de vizinhanças* de um ponto x num espaço topológico X é uma coleção $\mathfrak{B}(x)$ de vizinhanças de x com a seguinte propriedade: dada qualquer vizinhança U de x no espaço X, existe uma vizinhança $V \in \mathfrak{B}(x)$ tal que $V \subset U$. Em particular, diz-se que x possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças quando existe uma coleção enumerável $\mathfrak{B}(x) = \{V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots\}$ de vizinhanças de x tais que, dada qualquer vizinhança U de x em X, existe alguma V_n com $V_n \subset U$.

Se um ponto x, num espaço topológico X, possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças $\mathfrak{B}(x) = \{V_1, \ldots, V_n, \ldots\}$, podemos sempre admitir que $V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_n \supset \ldots$ porque, se $\mathfrak{B}(x)$ não gozar desta propriedade, substituiremos cada V_n por $W_n = V_1 \cap V_2 \cap \ldots \cap V_n$. O nôvo conjunto $\mathfrak{W}(x) = \{W_1, \ldots, W_n, \ldots\}$ ainda é um sistema fundamental enumerável de vizinhanças, com $W_1 \supset W_2 \supset \ldots \supset W_n \supset \ldots$.

Em tôdas as considerações topológicas de natureza local, quando se deveria tomar uma vizinhança arbitrária de um ponto x, pode-se restringir a considerar vizinhanças pertencentes a um determinado sistema fundamental. Para deixar claro êste ponto, enunciaremos os seguintes fatos, que o leitor poderá verificar sem dificuldade:

a) *Seja $\mathfrak{B}(x)$ um sistema fundamental de vizinhanças do ponto x no espaço topológico X. A fim de que x pertença ao interior de um conjunto $S \subset X$ é necessário e suficiente que exista $V \in \mathfrak{B}(x)$ tal que $V \subset S$. Anàlogamente, $x \in \overline{S}$ se, e sòmente se, para tôda $V \in \mathfrak{B}(x)$ tem-se $V \cap S \neq \varnothing$.*

b) *Sejam X, Y espaços topológicos, $f : X \to Y$ uma aplicação, $\mathfrak{B}(a)$ um sistema fundamental de vizinhanças de um ponto $a \in X$ e $\mathfrak{W}(b)$ um sistema fundamental de vizinhanças do ponto $b = f(a) \in Y$. Para que f seja contínua no ponto a, é necessário e suficiente que, dada qualquer $W \in \mathfrak{W}(b)$, exista $V \in \mathfrak{B}(a)$ tal que $f(V) \subset W$.*

EXEMPLOS

21. Num espaço métrico M, todo ponto x possui um sistema fundamental de vizinhanças enumerável. Basta considerar as bolas abertas $B(x; 1/n)$, de centro x e raio $1/n$, $n \in N$. De fato, qualquer vizinhança U

de x contém uma bola $B(x; \epsilon)$ e, para $n > 1/\epsilon$, temos $B(x; 1/n) \subset \subset B(x; \epsilon) \subset U$.

22. Espaços topológicos em que nenhum ponto possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças serão vistos no Cap. IX. Daremos aqui um dêsses exemplos. Trata-se do espaço $X = \mathfrak{F}(R; R)$, de tôdas as funções reais $f : R \to R$, com a *topologia da convergência simples*, que definiremos agora. Dados os números reais $t_1, \ldots, t_n \in R$ e os intervalos abertos $J_1 \ldots, J_n \subset R$, introduzamos a notação $A(t_1, \ldots, t_n; J_1, \ldots, J_n)$ para indicar o conjunto de tôdas as funções $f : R \to R$ tais que $f(t_1) \in J_1, \ldots, f(t_n) \in \in J_n$. Vê-se imediatamente que $A(s_1, \ldots, s_m; I_1, \ldots, I_m) \cap A(t_1, \ldots, t_n; J_1, \ldots, J_n) = A(s_1, \ldots, s_m, t_1, \ldots, t_n; I_1, \ldots, I_m, J_1, \ldots, J_n)$. Além disso, tôda função $f \in X = \mathfrak{F}(R; R)$ pertence a um dêsses conjuntos. Segue-se então da Prop. 10, Cap. III que os conjuntos $A(t_1, \ldots, t_n; J_1, \ldots, J_n)$ formam uma base de uma topologia em X, a qual denominaremos a *topologia da convergência simples*. Logo mais justificaremos a denominação. Mostremos agora que nenhum ponto $f \in X$ possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças. (Seguir-se-á, então, do exemplo anterior que X não é um espaço topológico metrizável.)

Observamos inicialmente que, relativamente à topologia de X, dada uma função $f : R \to R$, um sistema fundamental de vizinhanças de f é constituído pelos conjuntos

$$A(f; t_1, \ldots, t_k; \epsilon) = \{g : R \to R; |g(t_i) - f(t_i)| < \epsilon, \ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

onde $t_1, \ldots, t_k \in R$ e $\epsilon > 0$ são arbitrários. Se existisse um sistema fundamental $\mathfrak{B}(f) = \{V_1, \ldots V_n, \ldots\}$, poderíamos escolher, para cada $n \in N$, um conjunto $A_n = A(f; t_{n1}, \ldots, t_{nk}; \epsilon_n)$ tal que $f \in A_n \subset V_n$. Então, $\mathfrak{A}(f) = \{A_1, \ldots, A_n, \ldots\}$ seria ainda um sistema fundamental de vizinhanças de f. Ora, os números reais t_{ni} que comparecem na definição dos A_n formam um conjunto enumerável. Logo, existe um número real t_0 tal que $t_0 \neq t_{ni}$ sejam quais forem $n, i \in N$. Consideremos o conjunto $A_0 = A(f; t_0; 1)$. Dado qualquer A_n, não existe restrição alguma sôbre o valor que uma função $g \in A_n$ deve assumir no pònto t_0. Em particular, para cada n, existem funções $g \in A_n$ tais que $|g(t_0) - f(t_0)| \geq 1$. Segue-se que nenhum A_n pode estar contido em A_0 e portanto $\mathfrak{A}(f)$ não é um sistema fundamental de vizinhanças de f. Esta contradição estabelece a afirmação feita no início.

Mostremos agora que, considerada como pontos do espaço X, uma seqüência de funções $f_n : R \to R$ converge para uma função $f : R \to R$ se, e sòmente se, para todo número real t, $f_n(t) \to f(t)$. Isto justificará o nome de *topologia da convergência simples*. Suponhamos primeiramente que $f_n \to f$ em X, e tomemos $t \in R$. Para provar que $f_n(t) \to f(t)$, seja dado

$\epsilon > 0$. Como $A = A(f; t; \epsilon)$ é um aberto em X contendo f, existe $n_0 \in N$ tal que $n > n_0$ implica $f_n \in A$. Mas isto significa que $|f_n(t) - f(t)| < \epsilon$ para todo $n > n_0$, o que prova a afirmação. Recìprocamente, se $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ para todo $t \in R$ então, dada qualquer vizinhança V de f em X, existe um aberto $A = A(f; t_1, \ldots, t_k; \epsilon)$ tal que $f \in A \subset V$. Para cada $i = 1, \ldots, k$, existe $n_i \in N$ tal que $n > n_i$ implica $|f_n(t_i) - f(t_i)| < \epsilon$. Seja $n_0 = \text{máx.}\{n_1, \ldots, n_k\}$. Então, $n > n_0$ implica $f_n \in A \subset V$, e portanto $f_n \to f$.

Por brevidade, diremos que um espaço topológico X é um *espaço E1* quando todo ponto $x \in X$ possui um sistema fundamental de vizinhanças enumerável. (Esta condição é às vêzes chamada "primeiro axioma de enumerabilidade", daí a notação *E1*.)

Reveremos agora as proposições demonstradas nos parágrafos anteriores a respeito de convergência de seqüências em espaços métricos, examinando-as dentro do contexto mais geral de espaços topológicos. Omitiremos tôdas as demonstrações iguais às anteriores ou que delas difiram pela substituição das bolas $B(x; 1/n)$ por vizinhanças de um sistema fundamental $\mathfrak{B}(x) = \{V_1, \ldots, V_n, \ldots\}$, onde $V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_n \supset \ldots$ num espaço *E1*.

PROPOSIÇÃO 2* — *Num espaço de Hausdorff X, uma seqüência convergente possui um único limite. Recìprocamente, se X é um espaço E1 em que tôda seqüência convergente possui um único limite, então X é um espaço de Hausdorff.*

Demonstração: Basta provar a segunda parte. Seja X um espaço *E1* onde não vale o axioma de Hausdorff. Existem então dois pontos $x \neq y$ em X tais que tôda vizinhança de x e tôda vizinhança de y têm pontos em comum. Sejam $\mathfrak{B}(x) = (V_n)$ e $\mathfrak{W}(y) = (W_n)$ sistemas fundamentais enumeráveis de vizinhanças dêsses pontos. Para cada $n \in N$ podemos escolher $z_n \in V_n \cap W_n$. Vê-se imediatamente que $z_n \to x$ e $z_n \to y$.

PROPOSIÇÃO 3* — *Num espaço topológico X, para que uma seqüência (x_n) possua uma subseqüência convergindo para um ponto $z \in X$, é necessário que tôda vizinhança de a contenha têrmos x_n com índices n arbitràriamente grandes. Se X é um espaço E1, esta condição é também suficiente.*

PROPOSIÇÃO 5* — *Sejam X e Y espaços topológicos. Para que uma aplicação $f : X \to Y$ seja contínua no ponto $a \in X$ é necessário que $x_n \to a$ em X implique $f(x_n) \to f(a)$ em Y. Quando X é um espaço E1, esta condição é também suficiente (mesmo que Y não seja E1).*

Proposição 6* — *Seja S um subconjunto de um espaço topológico X. Para que $x \in \bar{S}$ é suficiente que exista uma seqüência de pontos $x_n \in S$ com $x = \lim x_n$. Quando X é um espaço $E1$, esta condição também é necessária.*

Deixamos ao leitor a tarefa de enunciar as análogas das Props. 7, 8 e 9 dêste capítulo. Observemos ainda que, nas proposições acima enunciadas, a exigência de que X seja um espaço $E1$ não pode ser dispensada. Para ilustrar êste ponto, daremos o exemplo que se segue.

EXEMPLO

23. No espaço $X = \mathfrak{F}(R; R)$ das funções reais $f: R \to R$, com a topologia da convergência simples, seja S o conjunto das funções características dos subconjuntos finitos de R. (Lembremos que, dado $F = \{t_1, \ldots, t_k\} \subset R$, a função característica de F, $\xi_F: R \to R$, é definida por $\xi_F(t) = 1$ se $t \in F$ e $\xi_F(t) = 0$ se $t \notin F$.) A função $g: R \to R$, definida por $g(t) = 1$ para todo $t \in R$, pertence ao fecho de S. Com efeito, dada qualquer vizinhança básica $A = A(g; t_1, \ldots, t_k; \epsilon)$ de g, pomos $F = \{t_1, \ldots, t_k\}$ e temos $\xi_F \in A$. Como $\xi_F \in S$, vê-se que $A \cap S \neq \varnothing$. Por outro lado, nenhuma seqüência de funções $\xi_n \in S$ pode convergir simplesmente para g. Com efeito, cada ξ_n sendo zero salvo num conjunto finito, segue-se que o conjunto dos $t \in R$ tais que $\xi_n(t) \neq 0$ para algum n é enumerável. Logo, existe $t_0 \in R$ tal que $\xi_n(t_0) = 0$ para todo $n \in N$. Por conseguinte, $\lim_{n \to \infty} \xi_n(t_0) = 0$, enquanto $g(t_0) = 1$. Assim, não é verdade que $g = \lim \xi_n$ no espaço X.

Por finalizar, observaremos que, das duas proposições demonstradas no § 5, a primeira delas (Prop. 12) se estende da maneira usual: a condição é necessária para qualquer par de espaços topológicos e suficiente no caso em que $f: X \to Y$ é definida num espaço $E1$.

Por outro lado, a Prop. 13 requer, para sua validade, um nôvo tipo de restrição (que voltaremos a encontrar, em situação diferente, no fim do Cap. VIII) sôbre o espaço onde toma valôres a aplicação $f: X \to Y$. O espaço Y deve ser *regular*, isto é, todo ponto $y \in Y$ deve possuir um sistema fundamental de vizinhanças fechadas. A demonstração da Prop. 13 dada no texto é típica de espaços métricos: usa bolas e seqüências. Por isso reformularemos abaixo completamente o enunciado e a demonstração da forma geral da referida proposição. A hipótese de que Y é de Hausdorff é necessária a fim de que, devido à unicidade dos limites, a extensão F seja uma aplicação bem definida.

Proposição 13* — *Seja $f: A \to Y$ uma aplicação contínua, definida num subespaço A de um espaço topológico X e tomando valôres num espaço*

de Hausdorff regular Y. Se, para cada $a \in \bar{A}$, existir o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ então a aplicação $F : \bar{A} \to Y$, definida por $F(a) = \lim_{x \to a} f(x)$, $a \in \bar{A}$, é contínua.

Demonstração: Consideremos arbitràriamente um ponto $x_0 \in \bar{A}$ e uma vizinhança V de $F(x_0)$ em Y. Como Y é regular, existe uma vizinhança W de $F(x_0)$ em Y tal que $\bar{W} \subset V$. Como $F(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$, existe uma vizinhança U de x_0 (que podemos tomar aberta) em X tal que $f(U \cap A) \subset W$. Afirmamos que $F(U \cap \bar{A}) \subset V$. Basta provar que $F(U \cap \bar{A}) \subset \bar{W}$. Seja então $a \in U \cap \bar{A}$. Devemos mostrar que, seja qual fôr a vizinhança Z de $F(a)$ em Y, tem-se $Z \cap W \neq \varnothing$. Como $F(a) = \lim_{x \to a} f(x)$, existe uma vizinhança U_0 de a em X (a qual podemos supor contida em U) tal que $f(U_0 \cap A) \subset Z$. Como $U_0 \cap A \neq \varnothing$ (porque $a \in \bar{A}$) temos $Z \cap W \supset f(U_0 \cap A) \neq \varnothing$, o que conclui a demonstração.

§ 7. Exercícios

1. Mostre que a seqüência de números reais $x_n = 1 + 1/2 + 1/3! + \ldots + 1/n!$ é limitada e portanto convergente.

2. Seja $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ uma enumeração arbitrária dos números racionais. Para qualquer número real a, existe uma subseqüência de (r_n) convergindo para a.

3. Seja (x_n) uma seqüência num espaço métrico M. Dada uma decomposição $N = N_1 \cup \ldots \cup N_p$ onde $N_1, \ldots, N_p$ são infinitos e disjuntos, se as subseqüências $(x_n)_{n \in N_1}, \ldots, (x_n)_{n \in N_p}$ convergem tôdas para o mesmo limite $a \in M$ então (x_n) converge para a. É êste resultado ainda verdadeiro no caso de uma decomposição *infinita* $N = N_1 \cup \ldots \cup N_p \cup \ldots$?

4. Sejam (x_n), (y_n) seqüências num espaço métrico M, com $d(x_n, y_n) < 1/n$ para todo $n \in N$. Se (x_n) fôr convergente, então (y_n) também será e $\lim x_n = \lim y_n$.

5. No conjunto Z dos inteiros, considerado como espaço métrico, tôda seqüência limitada assume apenas um número finito de valôres distintos.

6. Defina limite de uma seqüência num espaço pseudométrico (M, d). Prove que d é uma métrica se, e sòmente se, tôda seqüência convergente possui um único limite. Exiba explìcitamente uma seqüência que converge para dois limites distintos no espaço pseudométrico do Ex. 15, Cap. I.

7. Seja (x_n) uma seqüência convergente num espaço métrico M. Dada qualquer aplicação biunívoca $\varphi : N \to N$, a seqüência $y_n = x_{\varphi(n)}$ também converge em M e $\lim y_n = \lim x_n$. Que outra hipótese pode substituir a biunivocidade de φ? Obter o Ex. 8 como caso particular.

8. Dar exemplo de um conjunto limitado A num espaço métrico M e duas seqüências de pontos $a_n, b_n \in A$ com $\lim d(a_n, b_n) = \delta(A)$ sem que (a_n) ou (b_n) possuam subseqüências convergentes em M.

9. Dado um número real a, com $0 < a < 1$, tem-se $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1$.

10. Sejam X um espaço topológico qualquer, Y um espaço de Hausdorff e $f, g : X \to Y$ — aplicações contínuas. Dada $S \subset X$, se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in S$, então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \overline{S}$. (Esta é a formulação geral do Corolário da Prop. 6. O uso de seqüências não permite demonstrá-la nesta generalidade.) A hipótese sôbre Y é necessária.

11. Prove (usando seqüências) que as funções contínuas $f, g : R - \{0\} \to R$ definidas por $f(x) = 1/x$ e $f(x) = \text{sen}(1/x)$ não podem ser estendidas continuamente a R. (Isto é, não existem funções contínuas $\overline{f}, \overline{g} : R \to R$ tais que $\overline{f}(x) = 1/x$ e $\overline{g}(x) = \text{sen}(1/x)$ para todo $x \neq 0$.)

12. Num espaço métrico M, se $\lim x_n = x$ e $\lim y_n = y$ então $\lim d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

13. Seja $x = \lim x_n$ num espaço métrico M. Para cada $n \in N$, suponha que exista uma seqüência $(y_{n1}, y_{n2}, \ldots, y_{np}, \ldots)$ em M, com $x_n = \lim_{p\to\infty} y_{np}$. Então existe uma seqüência $(z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots)$ em M tal que, cada z_k é um dos y_{np} e $\lim_k z_k = x$.

14. Se A é um subconjunto limitado e não-vazio de um espaço métrico M, então $\delta(A) = \delta(\overline{A})$.

15. Diz-se que um ponto x, num espaço métrico M, é um *valor de aderência* da seqüência (x_n) quando esta possui uma subseqüência convergindo para x. Uma seqüência convergente possui exatamente um valor de aderência, mas a recíproca é falsa. O conjunto A dos valôres de aderência de uma seqüência pode ser vazio, finito ou infinito. Para cada $n \in N$, seja $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Então, $A = \bigcap_n \overline{X}_n$. Em particular, os valôres de aderência de (x_n) formam um subconjunto fechado de M. Dada uma seqüência limitada (x_n) de números reais, o conjunto A dos valôres de aderência de (x_n) é também limitado. Os números $l = \text{inf.}(A)$ e $L = \text{sup.}(A)$ pertencem a A e chamam-se o *limite inferior* e o *limite superior* da seqüência (x_n). Tem-se $l \leq L$ e (x_n) converge se, e sòmente se, $l = L$. Escrevem-se $l = \lim\text{inf.}(x_n)$. $L = \lim\text{sup.}(x_n)$. Na notação acima, tem-se $l = \lim_{n\to\infty} \text{inf.}(X_n)$ e $L = \lim_{n\to\infty} \text{sup.}(X_n)$. Tem-se $\delta(X_n) = \text{sup.}(X_n) - \text{inf.}(X_n)$, donde (x_n) converge se, e sòmente se, $\lim_n \delta(X_n) = 0$ (critério de convergência de Cauchy).

16. Demonstre a Prop. 8 diretamente a partir das definições de conjunto aberto num espaço métrico e limite de uma seqüência.

17. Sejam R o conjunto dos números reais e Q o conjunto dos números racionais. O conjunto das seqüências convergentes de números reais é fechado em $\mathfrak{B}(N; R)$ mas as seqüências convergentes de números racionais não formam um subconjunto fechado de $\mathfrak{B}(N; Q)$. Em qualquer espaço métrico M, porém, a aplicação que associa a cada seqüência convergente o seu limite é contínua [quando se considera o conjunto das seqüências convergentes em M como subespaço de $\mathfrak{B}(N; M)$].

18. *Limite duplo.* Uma *seqüência dupla* num espaço métrico M é uma aplicação $(m, n) \to x_{mn}$ de $N \times N$ em M. Diz-se que a seqüência dupla (x_{mn}) *converge* para o limite $x \in M$ quando, para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in N$ tal que $m, n > n_0$ implica $d(x_{mn}, x) < \epsilon$. Escreve-se então $x = \lim x_{mn} = \lim_{m,n} x_{mn} = \lim_{m,n\to\infty} x_{mn}$. Uma seqüência dupla (x_{mn})

origina, para cada $n \in N$ fixo, a seqüência simples $(x_{1n}, x_{2n}, x_{3n}, \ldots)$ e, para cada $m \in N$ fixo, a seqüência $(x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}, \ldots)$. Escrevem-se $\lim_{m\to\infty} x_{mn}$ e $\lim_{n\to\infty} x_{mn}$ para indicar os limites dessas seqüências simples, se existirem. *Exemplo*: seja $f: N \to R$ definida assim: $f(k) = k$ se k fôr par e $f(k) = 1/k$ se k fôr ímpar. A seqüência dupla de números reais $x_{mn} = (f(m) + f(n))/mn$ converge e $\lim_{m,n} x_{mn} = 0$. Mas, para nenhum m existe o limite $\lim_{m\to\infty} x_{mn}$. Tão pouco existe $\lim_{m\to\infty} x_{mn}$ para valor algum de n. Por outro lado, considerando-se $y_{mn} = f(n)/mn$, existe, para todo n o limite $\lim_{n\to\infty} y_{mn} = 0$ mas, para nenhum valor fixo de m existe $\lim_{n\to\infty} y_{mn}$. Vale, porém, o seguinte: se o limite duplo $x = \lim x_{mn}$ existe e, além disso, digamos, $\lim_{m\to\infty} x_{mn} = a_n$ existe para todo n, então deve-se ter $\lim_n a_n = x$. Em conseqüência, tem-se: $\lim_m (\lim_n x_{mn}) = \lim_n (\lim_m x_{mn}) = \lim_{m,n} x_{mn}$ desde que existam os dois limites dentro de parênteses e o limite duplo acima. Os limites repetidos podem existir e ser diferentes (caso em que o limite duplo não existe). *Exemplo*: sejam (a_n) e (b_n) seqüências arbitrárias em M. Ponhamos $x_{mn} = a_n$ se $m \geq n$ e $x_{mn} = b_n$ se $m < n$. Tem-se $\lim_m x_{mn} = a_n$ e $\lim_n x_{mn} = b_m$. Escolhendo as seqüências (a_n) e (b_m) podemos fazer com que os limites repetidos coincidam ou não. Finalmente, os limites repetidos podem existir e ser iguais sem que o limite duplo exista. Tal é o caso da seqüência dupla $x_{mn} = mn/(m^2 + n^2)$. Um resultado positivo é o seguinte: suponhamos que, para cada $n \in N$ fixo, exista o limite parcial $\lim_m x_{mn} = a_n$ *uniformemente em relação a* n. [Isto significa que, dado $\epsilon > 0$, é possível escolher m_0 tal que $m > m_0$ implica $d(x_{mn}, a_n) < \epsilon$, *seja qual fôr* n.] Suponhamos, em segundo lugar, que $\lim_n a_n = a$ existe. Então, o limite duplo $\lim_{m,n} x_{mn}$ existirá e será igual a a. Ou seja, $\lim x_{mn} = \lim_n (\lim_m x_{mn})$, desde que o limite repetido exista e que o limite dentro dos parênteses seja uniforme. Finalmente, se acrescentarmos a hipótese de que existe $\lim_n x_{mn}$ para todo n, então existirá o outro limite repetido $\lim_m (\lim_n x_{mn})$ e valerá a igualdade:

$$\lim_m (\lim_n x_{mn}) = \lim_n (\lim_m x_{mn}) = \lim_{m,n} x_{mn}.$$

Em suma, as igualdades acima valem (esta afirmação inclui a existência dos 5 limites) desde que existam os 2 limites dentro dos parênteses, um dêles sendo uniforme, e o limite repetido correspondente a êste.

19. Dados um conjunto arbitrário X e uma seqüência (S_n) de subconjuntos de X, indiquemos com $\xi_n : X \to R$ a função característica de S_n. [Por definição, $\xi_n(x) = 0$ se $x \notin S_n$ e $\xi_n(x) = 1$ se $x \in S_n$.] Se $S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset S_n \subset \ldots$ então $\lim \xi_n = \xi_S$ onde $S = \bigcup S_n$. Se $S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_n \supset \ldots$ então $\lim \xi_n = \xi_T$ onde $T = \bigcap S_n$. (Convergência simples de funções.) Para uma seqüência arbitrária (S_n) podemos considerar as funções lim sup. ξ_n e lim inf. ξ_n cujos valôres, em cada ponto $x \in X$ são respectivamente $\limsup.(\xi_n(x))$ e $\liminf.(\xi_n(x))$. Tem-se $\limsup. \xi_n = \xi_A$ e $\liminf. \xi_n = \xi_B$, onde A é o conjunto dos $x \in X$ que pertencem a S_n para infinitos valôres de n e B é o conjunto dos $x \in X$ que pertencem a S_n para todo n suficientemente grande. Logo, $A = \bigcap_p [\bigcup_{n \geq p} S_n]$ e $B = \bigcup_p [\bigcap_{n\geq p} S_n]$. Escreve-se $A = \limsup. S_n$ e $B = \liminf. S_n$. Tem-se $A \supset B$ e a seqüência (S_n) diz-se *convergente* quando $A = B$ $(= \lim S_n)$. Isto significa que um dado $x \in X$ ou pertence apenas a um número finito de conjuntos S_n ou

pertence a todos os S_n a partir de uma certa ordem. Tem-se $\lim (S_n \cup T_n) = \lim (S_n) \cup \cup \lim (T_n)$, $\lim (S_n \cap T_n) = \lim (S_n) \cap \lim (T_n)$ e $\lim (X - S_n) = X - \lim S_n$.

20. Dada uma seqüência de conjuntos (S_n) num espaço métrico M, definamos o *limite superior fechado* de (S_n) como $\overline{lf}(S_n) = \{x \in M$; tôda vizinhança de x interseta infinitos $S_n\}$ e o *limite inferior fechado* $\underline{lf}(S_n) = \{x \in M$; qualquer vizinhança de x interseta todos os S_n com exceção de um número finito dêles$\}$. Os conjuntos $\overline{lf}(S_n)$ e $\underline{lf}(S_n)$ são fechados e o primeiro contém o segundo. Se os conjuntos S_n são fechados, limitados e não-vazios e se a seqüência de funções contínuas $f_n(x) = d(x, S_n)$ converge uniformemente em M então $\lim_n d(x, S_n) = d(x, S)$, onde $S = \overline{lf}(S_n) = \underline{lf}(S_n) =$ "limite fechado" dos S_n. A existência do limite fechado $S = \underline{lf}(S_n) = \overline{lf}(S_n)$ não implica porém que a seqüência de funções $d(x, S_n)$ convirja em M, conforme se vê tomando na reta $S_n = \{0, n\}$ se n é par e $S_n = \{0, 1/n\}$ para n ímpar. O limite fechado de S_n existe e é $S = \{0\}$ mas as funções $f_n(x) = d(x, S_n)$ não formam uma seqüência convergente. (Comparar Exerc. 13, Cap. I.)

21. Seja F um subconjunto fechado de um espaço métrico M. Escrever $F = \bigcap A_n$ onde (A_n) é uma seqüência decrescente de abertos em M e concluir que a função característica $\xi_F : M \to R$ é limite simples de uma seqüência de funções contínuas $f_n : M \to R$, tais que $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ para todo $n \in N$ e todo $x \in M$.

22. Sejam X um espaço topológico, N um espaço métrico e $A \subset X$ um subconjunto tal que $\overline{A} = X$. Se uma seqüência de aplicações contínuas $f_n : X \to N$ converge uniformemente em A para uma aplicação contínua $f : X \to M$, então $f_n \to f$ uniformemente em X.

23. Seja M um espaço cuja métrica é "uniformemente discreta" no seguinte sentido: existe $\epsilon > 0$ tal que tôda bola aberta de raio ϵ reduz-se a um ponto. (*Exemplo*: Z.) Se $f_n : X \to M$ converge uniformemente para $f : X \to M$ então $f_n = f$ para todo n suficientemente grande. Dê exemplo de um espaço métrico discreto em que êste resultado não vale.

24. Sejam X um espaço topológico, M um espaço métrico e $f_n : X \to M$ uma seqüência de aplicações contínuas convergindo simplesmente para uma aplicação $f : X \to M$. Para que f seja contínua num ponto $x_0 \in X$ é necessário e suficiente que, para cada $\epsilon > 0$ existam um inteiro $n \in N$ e uma vizinhança V de x_0 em X tais que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in V$.

25. Sejam $I = [a, b]$ e indiquemos com $C^1(I; R)$ o espaço vetorial das funções reais $f : I \to R$ que possuem derivadas contínuas (e portanto limitadas) no intervalo $[a, b] = I$, com a norma $|f|_* = \sup_{t \in I} \{|f(t)| + |f'(t)|\}$. Mostre que $f_n \to f$ em $C^1(I; R)$ se, e sòmente se, $f_n \to f$ e $f_n' \to f'$ uniformemente em I. $C^1(I; R)$ não é um subconjunto fechado de $C^0(I; R) = \mathfrak{C}_0(I; R)$. [Recordar que, em $\mathfrak{C}_0(I; R)$ se considera a norma $|f| = \sup_{t \in I} |f(t)|$.] Mostre que se $f_n' \to f'$ uniformemente em I e $f_n(x_0) \to f(x_0)$ em algum ponto $x_0 \in I$ então $f_n \to f$ uniformemente em I. Em particular, a norma de $C^1(I; R)$ é equivalente a $|f|_\# = |f(a)| + \sup_{t \in I} |f'(t)|$.

26. Seja $f : A \to R$ uma função real, definida num subconjunto A de um espaço topológico X. Dado um ponto $a \in \overline{A}$, definamos $\limsup_{x \to a} f(x) = \inf_V [\sup.\{f(x); x \in

$\in V \cap A\}]$ onde V percorre as vizinhanças de a. (Suponha, para simplificar, que f é limitada, pelo menos numa vizinhança de a.) Defina $\lim_{x \to a} \inf . f(x)$ semelhantemente. Observe que $\omega_f(a) = (\lim_{x \to a} \sup . f(x)) - (\lim_{x \to a} \inf . f(x))$. Caracterize lim sup. f e lim inf. f por meio de seqüências, no caso em que a possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças. Mostre que $f : X \to R$ é semicontínua superiormente se, e sòmente se, para todo $a \in X$, $f(a) = \lim_{x \to a} \sup . f(x)$. Anàlogamente para semicontinuidade inferior. Conclua que a oscilação ω_f é semicontínua superiormente.

27. *Limites laterais*. Seja A um subconjunto da reta. Dados um espaço topoló gico X e uma aplicação $f : A \to X$, o *limite à direita* de f num ponto $a \in \overline{A}$ é definido por $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a} f^+(x)$, onde f^+ é a restrição de f ao conjunto dos pontos $x > a$, $x \in A$. [Evidentemente, isto só tem sentido se $a \in \overline{A \cap (a, \infty)}$.] Anàlogamente se define o limite à esquerda $\lim_{x \to a-} f(x)$. A função $f : R \to R$, definida por $f(x) = 0$ se x é irracional, $f(p/q) = 1/q$ se p/q é uma fração irredutível e $f(0) = 0$, tem limites laterais em todos os pontos $x \in R$. Se uma função $f : A \to R$, com $A \subset R$, possui os limites laterais em todos os pontos $a \in \overline{A}$, então os pontos de descontinuidade de f formam um conjunto enumerável. Se $f : A \to R$ é monótona, existem os limites laterais de f em todos os pontos $a \in \overline{A}$.

28. Diz-se que um subconjunto S de um espaço topológico X é *denso* em X quando $\overline{S} = X$. Um subgrupo aditivo G dos números reais é denso em R se, e sòmente se, 0 é ponto de acumulação de G. Se o subgrupo $G \subset R$ não fôr denso em R, existe um número real $a \geq 0$ tal que $G = Za$, isto é, $G = \{na; n \in Z\}$. Em particular, os subgrupos aditivos fechados de R são $\{0\}$, R e os da forma Za, $a > 0$. Concluir que se Θ fôr um número irracional, os números da forma $m + \Theta n$, $m, n \in Z$ constituem um subconjunto denso em R.

29. Para que um grupo topológico (vide Exerc. 79, Cap. I) seja um espaço *E1* é necessário e suficiente que o elemento neutro possua um sistema fundamental enumerável de vizinhanças.

30. Para que um espaço topológico X seja regular, é necessário e suficiente que, dados um subconjunto fechado $F \subset X$ e um ponto $p \in X - F$, existam abertos U, V em X com $p \in U$, $F \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$. Um espaço regular é de Hausdorff se, e sòmente se, todo ponto $p \in X$ é um subconjunto fechado de X.

31. Sejam X o espaço topológico bem ordenado do Exerc. 15, Cap. III. Considere o espaço Y, formado pelos mesmos elementos de X, com a topologia modificada do seguinte modo: os abertos de Y que não contêm o ponto Ω são os mesmos de X. Além disso, para cada aberto $A \subset X$, o conjunto $A \cup \{\Omega\}$ será aberto em Y. (Em outras palavras, Ω é agora um ponto isolado em Y.) As topologias de X e Y são diferentes, mas uma seqüência (x_n) converge em X se, e sòmente se, converge em Y.

32. *Filtros*: Um filtro num conjunto X é uma coleção não-vazia Φ de partes de X com as seguintes propriedades:

1.ª) nenhum $F \in \Phi$ é vazio;

2.ª) se $F \in \Phi$ e $G \supset F$ então $G \in \Phi$;

3.ª) se $F_1, F_2 \in \Phi$ então $F_1 \cap F_2 \in \Phi$.

Exemplos: *a)* Seja $N = \{1, 2, \ldots\}$ e Φ a coleção das partes $F \subset N$ que são complementares dos subconjuntos finitos de N. (Ou seja, para cada $F \in \Phi$ deve existir $n_0 \in N$ tal que $n \geq n_0$ implica $n \in F$.) *b)* Sejam X um espaço topológico, x um ponto de X e $\Phi = \mathfrak{V}(x)$ a coleção das vizinhanças de x em X. *c)* Sejam A um subconjunto de um espaço topológico X, $a \in \bar{A}$ um ponto aderente a A e Φ a coleção das interseções $V \cap A$, onde V percorre as vizinhanças de a em X. *d)* Seja $N \times N$ o conjunto dos pares ordenados de inteiros positivos e Φ a seguinte coleção de partes de $N \times N : F \in \Phi$ se, e sòmente se, existe $n_0 \in N$ tal que $m, n \geq n_0$ implica $(m, n) \in F$.

A noção de filtro permite unificar os vários tipos de limite que consideramos aqui [seqüências, $\lim_{x \to a} f(x)$, limites duplos] e tratar de outros tipos ainda mais gerais de limites.

Sejam Φ um filtro num conjunto X e $f : X \to Y$ uma aplicação de X num espaço topológico Y. Um ponto $y \in M$ diz-se *limite* de f segundo o filtro Φ, e escreve-se $y = \lim_{\Phi} f$, quando para tôda vizinhança V de y em Y existe um elemento $F \in \Phi$ tal que $f(F) \subset V$. Considerando os quatro exemplos de filtros dados acima, verifique que esta definição inclui os vários tipos de limite considerados no texto e no Exerc. 18. No caso em que X é um espaço topológico e $f : X \to X$ é a aplicação identidade, quando $x = \lim_{\Phi} f$ existe, diz-se que o filtro Φ é *convergente* e $x = \lim \Phi$ é o seu *limite*. Um espaço topológico X é de Hausdorff se, e sòmente se, todo filtro convergente em X possui um único limite. Para que uma aplicação $f : X \to Y$ seja contínua no ponto $a \in X$ é necessário e suficiente que, dado qualquer filtro Φ em X, convergindo para o ponto a, tenha-se $\lim_{\Phi} f = f(a)$. Para que um subconjunto S de um espaço topológico X seja fechado é necessário e suficiente que, para todo filtro Φ de partes de S que converge em X se tenha $\lim \Phi \in S$. Vê-se, portanto, que a noção de limite segundo um filtro é suficiente para caracterizar os conceitos topológicos.

Continuidade Uniforme

Capítulo V

§ 1. Introdução

Entre a rigidez de sua estrutura métrica e a flexibilidade da estrutura topológica subjacente, os espaços métricos possuem uma "estrutura uniforme", a qual já nos permitiu, no Cap. IV, falar de seqüências uniformemente convergentes. Neste capítulo e no seguinte, estudaremos aspectos dessa estrutura, ao considerarmos as noções de aplicação uniformemente contínua e de espaço métrico completo. Ao contrário do que fizemos no Cap. III, onde foi introduzida a noção geral de espaço topológico, não trataremos neste livro do conceito de "espaço uniforme". O leitor interessado poderá consultar [Bourbaki], especialmente o Cap. II.

Num espaço topológico há uma assimetria na maneira de dar sentido à noção de "proximidade". Por exemplo, dados um ponto a e um subconjunto B, num espaço topológico X, a expressão: "existem pontos de B arbitràriamente próximos de a" tem sentido preciso. Ela significa que tôda vizinhança de a contém algum ponto de B, ou seja, que $a \in \overline{B}$. Por outro lado, dados dois conjuntos $A, B \subset X$, em geral não tem sentido dizer que "existem pontos $a \in A$ e $b \in B$ arbitràriamente próximos um do outro". Em têrmos mais vagos, porém mais sugestivos, podemos dizer que em qualquer espaço topológico X tem sentido afirmar que um ponto variável x se aproxima de um ponto fixo a mas não tem sentido declarar que dois pontos variáveis $x, y \in X$ se aproximam um do outro. [Isto é possível dizer quando X é um espaço métrico: x e y se aproximam um do outro se $d(x, y) \to 0$.]

Esta estrutura adicional que os espaços métricos possuem, esta simetria da noção de proximidade, se reflete na concepção de função contínua. Tem sentido considerar o seguinte tipo de continuidade para uma aplica-

ção $f : M \to N : f(x)$ e $f(y)$ podem tornar-se arbitràriamente próximos, desde que se tomem x e y suficientemente próximos. Chega-se assim ao conceito de aplicação uniformemente contínua.

Também podemos considerar uma seqüência (x_n) em M e, em vez de indagar se x_n se aproxima de um ponto fixado $x \in M$, podemos perguntar se x_m e x_n se aproximam indefinidamente um do outro, à medida que m e n crescem. Isto conduz à noção de seqüência de Cauchy, que estudaremos no Cap. VI, a seguir.

No presente capítulo, serão definidas aplicações uniformemente contínuas e métricas uniformemente equivalentes, das quais veremos diversos exemplos. Teremos ocasião de examinar com mais detalhe o espaço $\mathfrak{F}(X; M)$ das aplicações de um conjunto X num espaço métrico M. Introduziremos em $\mathfrak{F}(X; M)$ a topologia da convergência uniforme, que mostraremos ser metrizável, e analisaremos o efeito de substituir a métrica de M por outra equivalente, na topologia de $\mathfrak{F}(X; M)$.

Um complemento importante aos resultados aqui obtidos é fornecido pela Prop. 15 do Cap. VII, segundo a qual tôda aplicação contínua definida num espaço métrico compacto é uniformemente contínua.

§ 2. Continuidade Uniforme

Sejam M, N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \to N$ diz-se *uniformemente contínua* quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitràriamente, pode-se obter um $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ implica $d(f(x), f(y)) < \epsilon$, sejam quais forem $x, y \in M$. Um *homeomorfismo uniforme* $f : M \to N$ é uma aplicação biunívoca, uniformemente contínua, de M sôbre N, cuja inversa $f^{-1} : N \to M$ também é uniformemente contínua. Evidentemente, tôda aplicação uniformemente contínua é contínua, e portanto todo homeomorfismo uniforme é um homeomorfismo.

Enquanto que a continuidade de uma aplicação $f : M \to N$ é uma propriedade *local* (f é contínua se, e sòmente se, cada ponto $x \in M$ possui uma vizinhança V tal que $f|V$ é contínua) e *topológica* (não se altera se substituirmos as métricas de M e N por outras equivalentes), a continuidade uniforme de $f : M \to N$ é, por outro lado, uma propriedade global e não topológica. Com efeito, em primeiro lugar, a escolha do δ a partir de ϵ deve ser válida na vizinhança de todos os pontos de M; em segundo lugar, uma aplicação $f : M \to N$, uniformemente contínua, pode perder esta propriedade ao substituir-se a métrica de M, ou de N, por outra topològicamente equivalente. (Vide Ex. 7.)

A proposição abaixo é imediata.

PROPOSIÇÃO 1 — *Sejam M, N, P espaços métricos. Se $f : M \to N$ e $g : N \to P$ são uniformemente contínuas então $g \circ f : M \to P$ é uniformemente contínua.*

COROLÁRIO — *Se $f : M \to N$ é uniformemente contínua e $A \subset M$ então a restrição $f \mid A$ é uniformemente contínua.*

OBSERVAÇÃO — Pode-se ter $f : M \to N$ uniformemente contínua, f sendo um homeomorfismo de M sôbre N, sem que o homeomorfismo inverso $f^{-1} : M \to M$ seja uniformemente contínuo. (Vide Ex. 3.)

EXEMPLOS

1. Diz-se que uma aplicação $f : M \to N$ satisfaz a uma *condição de Lipschitz* quando existe uma constante real $c > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq$ $\leq c \cdot d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$. (Quando $c = 1$, tem-se uma contração fraca; se $0 < c < 1$, f chama-se uma *contração*.) Se f satisfaz a uma condição de Lipschitz então f é uniformemente contínua. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, seja $\delta = \epsilon/c$. Quaisquer que sejam $x, y \in M$ com $d(x, y) < \delta$ tem-se $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y) < c \cdot (\epsilon/c) = \epsilon$. Segue-se que as seguintes aplicações são uniformemente contínuas. (Vide Ex. 1, *a*) até *g*) no Cap. II.) As aplicações constantes; as imersões isométricas, em particular as isometrias; as funções $d_A : M \to R$, onde $A \subset M$ é um subconjunto limitado e $d_A(x) = d(x, A)$; as projeções $p_i : M_1 \times \ldots \times M_n \to M_i$ de um produto cartesiano num dos seus fatôres; a aplicação canônica $\pi : S^n \to P^n$ da esfera unitária no espaço projetivo; a métrica $d : M \times M \to R$ e, em particular, a norma $x \to |x|$ de um espaço normado. Também é uniformemente contínua a adição $E \times E \to E$ de um espaço vetorial normado E, pois $|x + y| \leq |x| + |y|$. [Quanto à multiplicação por um escalar, $(\lambda, x) \to \lambda x$, vide a seguir, Ex. 4.] Tôda aplicação linear contínua $f : E \to F$ é uniformemente contínua. (Vide Prop. 6, Cap. II.) Tôda função real $f : I \to R$, definida num intervalo I da reta e possuindo derivada limitada em I [isto é: existe > 0 tal que $|f'(x)| \leq, c$ para todo $x \in I$] satisfaz, em virtude do teorema do valor médio, à condição de Lipschitz $|f(x) - f(y)| \leq$ $\leq c|x - y|$ e portanto f é uniformemente contínua, mesmo se $I = R$.

2. Diz-se que uma aplicação $f : M \to N$ satisfaz a uma *condição de Hölder de ordem* α, quando, para quaisquer $x, y \in M$, tem-se $d(f(x), f(y)) \leq$ $\leq c \cdot d(x, y)^\alpha$, onde c e α são constantes positivas. Se isto ocorre, f é uniformemente contínua. Com efeito, dado $\epsilon < 0$, seja $\delta = (\epsilon/c)^{1/\alpha}$. Se $d(x, y) < \delta$ então $d(f(x), f(y)) < c \cdot \delta^\alpha = \epsilon$. Em particular, seja R^+ o conjunto dos números reais $x > 0$. A função $f : R^+ \to R^+$, definida por $f(x) = \sqrt{x}$, é uniformemente contínua, pois satisfaz à condição de Hölder

$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq |x - y|^{1/2}$, como fàcilmente se verifica. Note-se que f não satisfaz a condição de Lipschitz alguma, pois o quociente $d(f(x),f(y))/ / d(x, y) = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| / |x - y| = 1/(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ não é limitado para $x, y \in R^+$. Anàlogamente, um cálculo elementar mostra que a função $g : R \to R$, definida por $g(x) = \sqrt[3]{x}$, satisfaz à condição de Hölder $|\sqrt[3]{x} - - \sqrt[3]{y}| \leq c \cdot |x - y|^{1/3}$ com $c = \sqrt[3]{4}$. Logo, g é uniformemente contínua, embora também não satisfaça a uma condição de Lipschitz. (Observe-se que f e g têm "derivada infinita" no ponto $x = 0$.)

3. Para $n > 1$, a função $x \to x^n$, de R em R, não é uniformemente contínua. (Supomos n inteiro.) A identidade

$$y^n - x^n = (y - x)(y^{n-1} + y^{n-2} + \ldots + x^{n-1})$$

fornece, para todo $x > 0$:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^n - x^n = \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{n} \left(x + \frac{1}{x}\right)^{n-i} x^{i-1} > \frac{1}{x} \sum x^{n-i} x^{i-1} = n \cdot x^{n-2}.$$

Logo, se $x > 1$, tomando $y = x + \dfrac{1}{x}$, tem-se $y^n - x^n > 1$, muito embora $y - x = 1/x$ possa tornar-se arbitràriamente pequeno. Isto mostra que $x \to x^n$ não é uniformemente contínua se n é inteiro e maior do que 1. Por conseguinte, $g : R \to R$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$, e $f : R^+ \to R^+$, $f(x) = \sqrt{x}$ são homeomorfismos uniformemente contínuos, cujos inversos não são uniformemente contínuos. Por outro lado, para todo $n > 1$ inteiro, a restrição de $x \to x^n$ a qualquer subconjunto limitado $x \subset R$ é uniformemente contínua. Com efeito, se $|x| \leq A$ para todo $x \in X$, então a identidade acima mostra que $|x^n - y^n| \leq n \cdot A^{n-1}|x - y|$ quaisquer que sejam $x, y \in X$. Anàlogamente, todo polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, restrito a um conjunto limitado $X \subset R$ (em particular a um intervalo $[a, b]$), satisfaz a uma condição de Lipschitz e portanto é uma função $p : X \to R$ uniformemente contínua.

4. Seja E um espaço vetorial normado, de dimensão > 0. A multiplicação por escalares, $m : R \times E \to E$, $m(t, x) = t \cdot x$, é contínua porém não uniformemente contínua. Com efeito, seja $v \in E$ tal que $|v| = 1$. As aplicações $\delta : R^+ \to R \times E$, $\delta(t) = (t, tv)$, e $\varphi : E \to R^+$, $\varphi(x) = |x|$, são uniformemente contínuas. Se m também o fôsse, seria uniformemente contínua a composta $\varphi \circ m \circ \delta : R^+ \to R^+$, pela Prop. 1. Mas $\varphi \circ m \circ \delta : t \to t^2$, logo não é uniformemente contínua. Segue-se, em particular, que a multiplicação de números reais $(x, y) \to xy$ não é uma função uniformemente contínua de R^2 em R.

5. Num espaço métrico discreto M, tôda aplicação $f : M \to N$ é contínua mas nem sempre uniformemente. Por exemplo, seja $M = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ com a métrica induzida da reta. A função $f : M \to R$, $f(1/n) = n$ não é uniformemente contínua.

6. As funções $f, g : R - \{0\} \to R$, definidas por $f(x) = 1/x$ e $g(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ são contínuas mas não uniformemente. No primeiro caso, basta tomar $x = 1/n$, $y = 1/(n+1)$, para ter $f(y) - f(x) = 1$, enquanto a distância $|x - y| = 1/n(n+1)$ pode tornar-se tão pequena quanto se queira, desde que se tome n grande. No segundo caso, pode-se tomar $x = 2/(2n-1)\pi$ e $y = 2/(2n+1)\pi$. Então, $|g(x) - g(y)| = 2$, mas $|x - y| = 4/(4n^2 - 1)\pi$ pode assumir valôres arbitràriamente pequenos, desde que n aumente indefinidamente.

7. Sejam $M = (M, d)$ e $N = (N, d_1)$ espaços métricos e $h : M \to N$ um homeomorfismo que não é uniformemente contínuo. No espaço M, a métrica $d'(x, y) = d_1(h(x), h(y))$ é equivalente à métrica original d e agora $h : (M, d') \to (N, d_1)$ é uma isometria, donde uniformemente contínuo.

§ 3. Métricas Uniformemente Equivalentes

Duas métricas d, d' num espaço M dizem-se *uniformemente equivalentes* quando a aplicação identidade $i : (M, d) \to (M, d')$ é um homeomorfismo uniforme

EXEMPLOS

8. Se existirem números reais $m, n > 0$ tais que $d'(x, y) \leq m \cdot d(x, y)$ e $d(x, y) \leq n \cdot d'(x, y)$ quaisquer que sejam $x, y \in M$, então as métricas d e d' serão uniformemente equivalentes, pois, neste caso, a aplicação identidade $i : (M, d) \to (M, d')$ e sua inversa $i^* : (M, d') \to (M, d)$ satisfazem a condição de Lipschitz, com as constantes m e n, respectivamente. Logo, i e i^* são uniformemente contínuas. Em particular, duas normas equivalentes num espaço vetorial E são uniformemente equivalentes.

9. Outra conseqüência desta observação é que as métricas $d(x, y) = \sqrt{\Sigma\, d(x_i, y_i)^2}$, $d'(x, y) = \Sigma\, d(x_i, y_i)$ e $d''(x, y) = \text{máx.}\,\{d(x_1, y_1), \ldots, d(x_n, y_n)\}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, definidas no produto cartesiano $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ de espaços métricos $M_1, \ldots, M_n$, são duas a duas uniformemente equivalentes. Com efeito, como se notou no Ex. 11, Cap. II, tem-se $d''(x, y) \leq d(x, y) \leq d'(x, y) \leq n \cdot d''(x, y)$, sejam quais forem $x, y \in M$. Assim, as aplicações definidas, ou tomando valôres, no

espaço produto $M = M_1 \times \ldots \times M_n$, que são uniformemente contínuas em relação a uma dessas métricas o são igualmente em relação às outras duas. (Vide Prop. 2, abaixo.)

10. Dado um espaço métrico (M, d), as métricas d' e d'', definidas por $d'(x, y) = \text{mín.}\{1, d(x, y)\}$ e $d''(x, y) = d(x, y)/(1 + d(x, y))$, são uniformemente equivalentes a d. Com efeito, cada aplicação identidade $i : (M, d) \to (M, d')$ e $j : (M, d) \to (M, d'')$ é uma contração fraca e portanto uniformemente contínua. As inversas $i' : (M, d') \to (M, d)$ e $j'' : (M, d'') \to (M, d)$ são uniformemente contínuas, pelos motivos seguintes:

a) Se $d'(x, y) < 1$, então $d'(x, y) = d(x, y)$. Assim, dado $\epsilon > 0$, tome-se $\delta = \text{mín.}\{1, \epsilon\}$; se $d'(x, y) < \delta$ então $d(x, y) = d'(x, y) < \delta \leq \epsilon$, isto é, $d'(x, y) < \delta$ implica $d(x, y) < \epsilon$.

b) Dado > 0, tome-se $\delta = \epsilon/(1 + \epsilon)$. Se $d''(x, y) < \delta$, um cálculo imediato mostra que $d(x, y) < \epsilon$.

Segue-se que tôda métrica é uniformemente equivalente a uma métrica limitada.

11. Sejam $M = (M, d)$ e $N = (N, d_1)$ espaços métricos. Dado um homeomorfismo $h : M \to N$, a métrica $d'(x, y) = d_1(h(x), h(y))$, no espaço M, é equivalente a d. Segue-se imediatamente das definições que d' é uniformemente equivalente a d se, e sòmente se, j fôr um homeomorfismo uniforme. Em particular, a métrica $\delta(x, y) = |x^3 - y^3|$, na reta, é equivalente, mas não uniformemente equivalente, à métrica usual $d(x, y) = |x - y|$, pois $x \to x^3$ não é um homeomorfismo uniforme. Ainda na reta, a métrica limitada $\delta'(x, y) = \text{mín.}\{1, \delta(x, y)\} = \text{mín.}\{1, |x^3 - y^3|\}$ é equivalente, mas não uniformemente equivalente à métrica usual $d(x, y) = |x - y|$. Com efeito, para todo $x \in R$ suficientemente grande, e $y = x + 1/x$, tem-se $\delta'(x, y) = 1$ e $d(x, y) = 1/x$; (*cf.* Ex. 3) logo, a aplicação identidade $i : (R, d) \to (R, \delta')$ não é uniformemente contínua. Finalmente, as métricas $d'(x, y) = \text{mín.}\{1, |x - y|\}$ e $\delta'(x, y) = \text{mín.}\{1, |x^3 - y^3|\}$ na reta, são limitadas e equivalentes mas não são uniformemente equivalentes pois a primeira é uniformemente equivalente a d mas a segunda não é.

A proposição abaixo é imediata conseqüência da Prop. 1.

Proposição 2 — *Sejam d e d' (resp. d_1 e d_1') métricas uniformemente equivalentes no espaço M (resp. no espaço N). Se $f : (M, d) \to (N, d_1)$ é uniformemente contínua, então $f : (M, d') \to (N, d_1')$ também o é.*

EXEMPLO

12. Seja $J = (a, b)$ um intervalo limitado da reta e seja $h : R \to J$ um homeomorfismo. [Por exemplo, $J = (-1, +1)$, $h(x) = x/(1 + x)$.] O ho-

meomorfismo inverso $h^{-1}: J \to R$ nunca é uniformemente contínuo. Com efeito, se fôsse, existiria $\delta > 0$ tal que $x, y \in J$, $|x - y| < \delta$ implicariam $|h^{-1}(x) - h^{-1}(y)| < 1$. Fixemos um inteiro $n > 0$ tal que $(b - a)/n < \delta$. Dados $x, y \in J$ quaisquer, dividindo o intervalo de extremos x, y em n partes iguais, por meio de pontos $x_0 = x$, $x_1, \ldots, x_{n-1}$, $= y$, teremos $|x_i - x_{i-1}| < \delta$, $i = 1, 2, \ldots, n$, e portanto $|h^{-1}(x_i) - h^{-1}(x_{i-1})| < 1$. Daí viria $|h^{-1}(x) - h^{-1}(y)| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |h^{-1}(x_i) - h^{-1}(x_{i-1})| < n$. Em suma, se h^{-1} fôsse uniformemente contínua, teríamos $|h^{-1}(x) - h^{-1}(y)| < n$ (n fixo) para quaisquer $x, y \in J$. Então, $h^{-1}: J \to R$ seria uma aplicação limitada, o que é uma contradição. Segue-se que as métricas limitadas em R, obtidas através de homeomorfismos $h: R \to J$, de R sôbre um intervalo limitado, pela fórmula $\delta(x, y) = |h(x) - h(y)|$, nunca são uniformemente equivalentes à métrica usual da reta.

13. Seja $N = N_1 \times \ldots \times N_k$ o produto cartesiano dos espaços métricos N_i, com a métrica $d''(x, y) = \text{máx.}\ d(x_1, y_1), \ldots, d(x_k, y_k)$ $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, \ldots, y_k)$. Seja M outro espaço métrico. Uma aplicação $f: M \to N$ é uniformemente contínua se, e sòmente se, as aplicações coordenadas $f_i: M \to N_i$, definidas por $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x))$, $x \in M$ são tôdas uniformemente contínuas. Com efeito, se f é uniformemente contínua, então cada f_i também é, pois $f_i = p_i \circ f$ e as projeções $p_i: M \to N_i$ são uniformemente contínuas. Recìprocamente, se $f_1, \ldots, f_k$ são uniformemente contínuas, dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0, \ldots, \delta_k > 0$ tais que $d(x, y) < \delta_i$ implica $d(f_i(x), f_i(y)) < \epsilon$ $(x, y \in M)$. Seja $\delta = \text{mín.}\{\delta_1, \ldots, \delta_k\}$. Se $x, y \in M$ são tais que $d(x, y) < \delta$, então $d''(f(x), f(y)) = \text{máx.}\{d(f_1(x), f_1(y)), \ldots$ $\ldots, d(f_k(x), f_k(y))\} < \epsilon$, o que prova a continuidade uniforme de f. Em virtude da Prop. 2, e do Ex. 9 acima, êste resultado ainda é válido ao adotarmos em $N = N_1 \times \ldots \times N_k$ uma das métricas $d(x, y) = \sqrt{\Sigma\, d(x_i, y_i)^2}$ ou $d'(x, y) = \Sigma\, d(x_i, y_i)$, $x = (x_1, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, \ldots, y_k)$.

§ 4. Mudança de Métrica e Espaços de Funções

Quando se substitui a métrica de um espaço M por outra, mesmo equivalente, o conjunto $\mathfrak{B}(X; M)$, das aplicações limitadas de um conjunto X no espaço M, varia, pois as aplicações que são limitadas segundo uma métrica podem não o ser segundo a outra. Mas, ainda que o conjunto $\mathfrak{B}(X; M)$ permaneça o mesmo (o que acontece, por exemplo, quando a métrica original e a nova são ambas limitadas), sua topologia pode alterar-se ao passarmos de uma métrica de M para outra equivalente. Nosso objetivo neste parágrafo é analisar êste fenômeno.

Sejam, pois, M um espaço métrico e X um conjunto arbitrário. Como de costume, indiquemos com $\mathfrak{F}(X; M)$ o conjunto de tôdas as aplicações de X em M. Dadas $f, g \in \mathfrak{F}(X; M)$, põe-se $d(f, g) = \sup.\{d(f(x), g(x)); x \in X\}$. A relação $d(f, g) < \infty$ é uma equivalência em $\mathfrak{F}(X; M)$; a classe de equivalência de uma aplicação $f : X \to M$ é indicada com $\mathfrak{B}_f(X; M)$. Cada $\mathfrak{B}_f(X; M)$ é um espaço métrico com a distância d acima definida; se $d(f, g) < \infty$, $\mathfrak{B}_f(X; M) = \mathfrak{B}_g(X; M)$ e, se $d(f, g) = \infty$, $\mathfrak{B}_f(X; M) \cap \mathfrak{B}_g(X; M) = \varnothing$. O espaço $\mathfrak{B}(X; M)$ das aplicações limitadas de X em M coincide com $\mathfrak{B}_c(X; M)$ onde $c : X \to M$ é qualquer aplicação constante.

Em cada um dos espaços $\mathfrak{B}_f(X; M)$ escolhamos um "representante" $\alpha : X \to M$. Seja A o conjunto dêsses representantes. Se $\alpha, \beta \in A$ e $\alpha \neq \beta$, então $\mathfrak{B}_\alpha(X; M) \cap \mathfrak{B}_\beta(X; M) = \varnothing$, logo

$$\mathfrak{F}(X; M) = \bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{B}_\alpha(X; M)$$

é uma reunião disjunta. [É claro que, se a métrica de M fôr limitada, existe um único $\mathfrak{B}_\alpha(X; M) = \mathfrak{B}(X; M) = \mathfrak{F}(X; M)$.] Até agora, $\mathfrak{F}(X; M)$ tem sido considerado como reunião de espaços métricos, mas não como um espaço métrico. Definiremos agora uma topologia em $\mathfrak{F}(X; M)$, chamada a topologia da convergência uniforme. Logo mais mostraremos que essa topologia é metrizável, mas observamos que não existe uma métrica natural para $\mathfrak{F}(X; M)$, salvo no caso óbvio em que M é limitado.

A topologia de $\mathfrak{F}(X; M)$ é definida declarando-se que um conjunto $U \subset \mathfrak{F}(X; M)$ é aberto se, e sòmente se, $U \cap \mathfrak{B}_\alpha(X; M)$ é aberto em $\mathfrak{B}_\alpha(X; M)$ para cada $\alpha \in A$. Em outras palavras, os abertos de $\mathfrak{F}(X; M)$ são os subconjuntos abertos de cada $\mathfrak{B}_\alpha(X; M)$ e suas reuniões. Em particular, cada $\mathfrak{B}_\alpha = \mathfrak{B}_\alpha(X; M)$ é aberto em $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(X; M)$. Além disso, como $\mathfrak{B}_\alpha = \mathfrak{F} - \bigcup_{\alpha' \neq \alpha} \mathfrak{B}_{\alpha'}$, cada $\mathfrak{B}_\alpha$ é também fechado em $\mathfrak{F}$. A topologia que $\mathfrak{F}$ induz em cada $\mathfrak{B}_\alpha$ coincide com a que $\mathfrak{B}_\alpha$ já possuía. Se X fôr um conjunto infinito e a métrica de M fôr não limitada, então nem tôda aplicação $f : X \to M$ é limitada. Em outras palavras, $\mathfrak{B}(X; M) \neq \mathfrak{F}(X; M)$. Segue-se que, neste caso, $\mathfrak{F}(X; M)$ é um espaço topológico desconexo, pois $\mathfrak{B}(X; M)$ é um subconjunto aberto e fechado de $\mathfrak{F}(X; M)$, que não coincide com o espaço todo e certamente não é vazio. (Vide Cap. III, §7.)

Em geral, diz-se que um espaço topológico Y é *soma topológica* de uma família de subespaços $(Y_\alpha)_{\alpha \in A}$, quando $Y = \bigcup Y_\alpha$, os Y_α são dois a dois disjuntos e cada um dêles é aberto (e conseqüentemente fechado) em Y. Assim, $\mathfrak{F}(X; M)$ é a soma topológica dos espaços $\mathfrak{B}_\alpha(X; M)$. Numa soma topológica, tudo se passa como se, em vez de subespaços do mesmo espaço Y, os espaços Y fôssem totalmente independentes uns dos outros. (Por exemplo, nenhum ponto $y \in Y_\alpha$ pode ser limite de pontos pertencentes aos demais Y_α).

Consideremos outro espaço métrico N. Uma aplicação $\varphi : M \to N$ induz, nos espaços de funções correspondentes, uma aplicação

$$X \xrightarrow{f} M \xrightarrow{\varphi} N \qquad \varphi_*(f)$$

$$\varphi_* : \mathfrak{F}(X; M) \to \mathfrak{F}(X; N)$$

definida por $\varphi_*(f) = \varphi \circ f$.

Desejamos saber em que condições φ_* é contínua. A mera continuidade de φ não basta, conforme a proposição seguinte mostra:

Proposição 3 — *Sejam M, N espaços métricos e X um conjunto. Para que uma aplicação $\varphi : M \to N$ induza uma aplicação contínua $\varphi_* : \mathfrak{F}(X; M) \to \to \mathfrak{F}(X; N)$, é suficiente que φ seja uniformemente contínua. Se X fôr infinito, esta condição também é necessária.*

Demonstração: Seja φ uniformemente contínua. Tomemos $f_0 \in \mathfrak{F}(X; M)$. Para mostrar que φ_* é contínua no ponto f_0, seja dado $\epsilon > 0$. Como φ é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que se $y, z \in M$ e $d(y, z) < \delta$ então $d(\varphi(y), \varphi(z)) < \epsilon/2$. Logo, se $f \in \mathfrak{F}(X; M)$ e $d(f, f_0) < \delta$ então sup. $\{d(\varphi(f(x)), \varphi(f_0(x)); x \in X\} \leq \epsilon/2 < \epsilon$, donde $d(\varphi_*(f), \varphi_*(f_0)) < \epsilon$, o que conclui a demonstração da primeira parte. Reciprocamente, suponhamos que φ não seja uniformemente contínua. Então, existem seqüências de pontos $x_n, y_n \in M$ tais que $d(x_n, y_n) \to 0$ mas $d(\varphi(x_n), \varphi(y_n)) \geq \epsilon$, para um certo $\epsilon > 0$ fixado. Como X é suposto infinito, existe em X uma seqüência enumerável de elementos distintos a_n e podemos definir uma aplicação $f : X \to M$ tal que $f(a_n) = x_n$ (fazendo, por exemplo, f constante, igual a x_1, nos demais pontos que por ventura existam em X). Consideremos agora uma seqüência de aplicações $f_n : X \to M$, tais que $f_n(a_n) = y_n$ mas $f_n = f$ nos pontos de X diferentes de a_n. Então, $d(f_n, f) = d(x_n, y_n) \to 0$, donde $f_n \to f$ em $\mathfrak{F}(X; M)$. Por outro lado $d(\varphi_*(f_n), \varphi_*(f)) = d(\varphi(f_n(a_n)), \varphi(f(a_n))) = d(\varphi(y_n), \varphi(x_n)) \geq \epsilon$. Isto mostra que φ_* não é contínua no ponto $f \in \mathfrak{F}(X; M)$, e completa a demonstração.

Observação — Na demonstração acima, parece têrmos tratado $\mathfrak{F}(X; M)$ e $\mathfrak{F}(X; N)$ como espaços métricos, sem havermos ainda definido métricas nestes espaços. Na realidade, não consideramos acima a distância entre dois elementos arbitrários em tais espaços. Apenas tomamos algumas vizinhanças de pontos. Ora, o conjunto das aplicações que estão a uma distância finita de uma aplicação dada h é uma vizinhança aberta de h (por definição) e nesta vizinhança há uma métrica compatível com sua topologia. Os ϵ's e δ's tomados acima, referem-se a tal métrica.

Corolário 1 — *Se uma seqüência de aplicações* $f_n : X \to M$ *converge uniformemente para* $f : X \to M$ *e se* $\varphi : M \to N$ *é uniformemente contínua, então* $\varphi \circ f_n : X \to N$ *converge uniformemente para* $\varphi \cdot f : X \to N$.

É imediato verificar que se $\varphi : M \to N$ fôr uma correspondência biunívoca, $\varphi_* : \mathfrak{F}(X; M) \to \mathfrak{F}(X; N)$ também o será e $(\varphi_*)^{-1} = (\varphi^{-1})_*$. Segue-se o

Corolário 2 — *Se* $\varphi : M \to N$ *fôr um homeomorfismo uniforme* $\varphi_* : \mathfrak{F}(X; M) \to \mathfrak{F}(X; N)$ *será um homeomorfismo, cujo inverso é* $(\varphi^{-1})_* : \mathfrak{F}(X; N) \to \mathfrak{F}(X; M)$.

Corolário 3 — *Se* $\varphi : M \to N$, *além de uniformemente contínua, fôr uma aplicação limitada (em particular, se a métrica de* N *fôr limitada) então* $\varphi_*(\mathfrak{F}(X; M)) \subset \mathfrak{B}(X; N)$ *e a restrição de* φ_* *a cada* $\mathfrak{B}_\alpha(X; M)$ *é uma aplicação uniformemente contínua* $\mathfrak{B}_\alpha(X; M) \to \mathfrak{B}(X; N)$.

A continuidade uniforme de $\varphi_* | \mathfrak{B}_\alpha(X; M)$ resulta da demonstração da Prop. 3 acima.

Observação — Dada $\varphi : M \to N$ uniformemente contínua, nem sempre se tem $\varphi_*(\mathfrak{B}_\alpha(X; M)) \subset \mathfrak{B}_{\varphi \circ \alpha}(X; N)$.

Corolário 4 — *Duas métricas uniformemente equivalentes num espaço* M *definem a mesma topologia em* $\mathfrak{F}(X; M)$. *Se ambas as métricas forem, além disso, limitadas, elas definirão em* $\mathfrak{F}(X; M) = \mathfrak{B}(X; M)$ *métricas uniformemente equivalentes.*

Corolário 5 — *Sejam quais forem o conjunto* X *e o espaço métrico* M, *o espaço topológico* $\mathfrak{F}(X; M)$ *é metrizável.*

Com efeito, existe sempre uma métrica limitada d', uniformemente equivalente à métrica d de M e portanto a topologia de $\mathfrak{F}(X; M)$ é a mesma de $\mathfrak{F}(X; M')$, $M' = (M, d')$, sendo esta última metrizável, definida pela métrica de $\mathfrak{B}(X; M') = \mathfrak{F}(X; M')$.

Note-se que a métrica de $\mathfrak{F}(X; M')$ acima é natural porque resulta, sem escolhas arbitrárias, da métrica de M'. Entretanto, quando se parte de M, não há, entre as métricas limitadas que são uniformemente equivalentes a d, uma que se imponha sôbre as demais, de modo que apenas a topologia de $\mathfrak{F}(X; M)$ é natural.

Se duas métricas d e d' em M são apenas equivalentes, as topologias que elas determinam em $\mathfrak{F}(X; M)$ e $\mathfrak{F}(X; M')$ podem ser diferentes, isto é, a aplicação identidade $i : \mathfrak{F}(X; M) \to \mathfrak{F}(X; M')$ pode não ser um homeomorfismo. [Estamos escrevendo $M = (M, d)$ e $M' = (M, d')$.] Mais do que isso, pode acontecer que não exista homeomorfismo algum de $\mathfrak{F}(X; M)$ sôbre $\mathfrak{F}(X; M')$, conforme se vê no exemplo seguinte.

EXEMPLO

14. Seja X um conjunto infinito. Considerando na reta R a métrica natural $d(x, y) = |x - y|$, o espaço $\mathfrak{F}(X; R)$ é desconexo pois o subconjunto $\mathfrak{B}(X; R)$, formado pelas aplicações limitadas $f : X \to R$, é aberto, fechado, não-vazio e diferente do espaço inteiro. (Vide Cap. III, §7.) Indiquemos com J o intervalo aberto $(-1, +1)$. O homeomorfismo $h : R \to J$, definido por $h(x) = x/(1 + |x|)$, dá origem a uma métrica $d_1(x, y) = |h(x) - h(y)|$ em R, a qual é equivalente, embora não uniformemente, à métrica usual d. Seja $R_1 = (R, d_1)$. Como d_1 é limitada, $\mathfrak{F}(X; R_1)$ é um espaço métrico e, na realidade, $h_* : \mathfrak{F}(X; R_1) \to \mathfrak{F}(X; J)$ é uma isometria (em particular, um homeomorfismo) como é imediato verificar. Ora, $\mathfrak{F}(X; J)$ é um subconjunto convexo do espaço vetorial normado $\mathfrak{B}(X; R)$. Logo, $\mathfrak{F}(X; J)$ é um espaço topológico conexo. Segue-se que $\mathfrak{F}(X; R_1)$ também é conexo e, por conseguinte, $\mathfrak{F}(X; R_1)$ não pode ser homeomorfo a $\mathfrak{F}(X; R)$.

§ 5. Exercícios

1. Um polinômio $p : R \to R$ é uma função uniformemente contínua em R se, e sòmente se, tem grau ≤ 1.

2. Seja $f : J \to R$ uma função derivável num intervalo J (aberto ou fechado, limitado ou não) da reta. Para que f seja uniformemente contínua em J, é necessário e suficiente que sua derivada f' seja limitada em J. A função $f(x) = \text{sen}(x^n)$, onde $n \in N$ é fixo, é uniformemente contínua se, e sòmente se, $n = 0$ ou $n = 1$.

3. Todo homeomorfismo $h : R \to J$, sôbre um intervalo limitado J, é uniformemente contínuo. É necessário supor h um homeomorfismo?

4. Seja M um espaço métrico conexo limitado. Se $f : M \to N$ é uniformemente contínua, então $f(M)$ é limitado. As hipóteses feitas sôbre M são indispensáveis.

5. Seja $f : R - \{0\} \to R$ definida por $f(x) = 0$ se $x < 0$ e $f(x) = 1$ se $x > 0$. Então, f é contínua mas não é uniformemente contínua. Generalize, considerando uma função de Urysohn (vide Cap. III, §5), de um par de fechados $F, G \subset M$, com $F \cap G = \varnothing$, $d(F, G) = 0$. Por outro lado, se $F, G \subset M$ são fechados, com $d(F, G) > 0$, e $f : M \to N$ é tal que $f|(M - F)$ e $f|(M - G)$ são uniformemente contínuas, então $f : M \to N$ é uniformemente contínua.

6. O conjunto das aplicações uniformemente contínuas $f : M \to N$ é fechado no espaço $\mathfrak{F}(M; N)$ e portanto em $\mathfrak{C}(M; N)$. Se E fôr um espaço vetorial normado, então as aplicações uniformemente contínuas $f : M \to E$ formam um subespaço vetorial de $\mathfrak{F}(M; E)$. Se $E = R$ e $f, g \in \mathfrak{F}(M; R)$ são uniformemente contínuas e limitadas, então o produto $f \cdot g$ é uniformemente contínuo.

7. Para que $f : M \to N$ seja uniformemente contínua, é necessário e suficiente que $d(x_n, y_n) \to 0$ implique $d(f(x_n), f(y_n)) \to 0$, sejam quais forem as seqüências (x_n) e (y_n) em M.

8. Sejam X um conjunto arbitrário e E um espaço vetorial normado. O espaço topológico $\mathfrak{F}(X;E)$ das aplicações $f:X \to E$ é localmente conexo por caminhos e suas componentes conexas são as "variedades afins" $\mathfrak{B}_f(X;E) = f + \mathfrak{B}(X;E) = \{g: X \to E; d(f,g) < \infty\}$.

9. Seja X um conjunto infinito. Dadas $f, g: X \to R$, a aplicação $\xi: R \to \mathfrak{F}(X;R)$, definida por $\xi(t) = tf + (1-t)g$, é contínua se $d(f,g) < \infty$. Se, porém, $d(f,g) = \infty$, então ξ é descontínua em todos os pontos $t \in R$. Segue-se, em particular, que a aplicação $(t,f) \to tf$, de $R \times \mathfrak{F}(X;R)$, em $\mathfrak{F}(X;R)$ é descontínua. Por outro lado, como $\mathfrak{B}(X;R)$ é um espaço vetorial normado, a restrição $R \times \mathfrak{B}(X;R) \to \mathfrak{B}(X;R)$ dessa aplicação é contínua. Generalizar para $\mathfrak{F}(X;E)$, onde E é um espaço vetorial normado $\neq 0$.

10. Dado um conjunto arbitrário X, seja $\mathfrak{F}_s(X;R)$ o espaço das funções reais $f:X \to R$, com a topologia da convergência simples. As operações $(f,g) \to f+g$ e $(t,f) \to t \cdot f$ são aplicações contínuas de $\mathfrak{F}_s \times \mathfrak{F}_s$ em $\mathfrak{F}_s$ e de $R \times \mathfrak{F}_s$ em $\mathfrak{F}_s$, respectivamente. Isto se exprime dizendo que $\mathfrak{F}_s(X;R)$ é um *espaço vetorial topológico*. [Uma conseqüência da continuidade de $(t,f) \to tf$ é que $f \to -f$ é contínua, logo $\mathfrak{F}_s$ é, em particular um grupo topológico aditivo.] Outros exemplos de espaços vetoriais topológicos são os espaços vetoriais normados. O exercício acima mostra que, se X fôr infinito, então $\mathfrak{F}(X;R)$, com a topologia da convergência uniforme, não é um espaço vetorial topológico. Todavia, a adição $(f,g) \to f+g$ e a aplicação $f \to -f$ são operações contínuas, que fazem de $\mathfrak{F}(X;R)$ um grupo topológico.

11. Dados os grupos topológicos G, H, mesmo não metrizáveis, tem sentido falar de uma aplicação uniformemente contínua $f:G \to H$. Isto significa que, dada uma vizinhança arbitrária do elemento neutro $e' \in H$, existe uma vizinhança U do elemento neutro $e \in G$ tal que, para quaisquer $x, y \in G$ com $xy^{-1} \in U$, tem-se $f(x)f(y)^{-1} \in V$. Tôda aplicação uniformemente contínua $f:G \to H$ é contínua. Todo homeomorfismo contínuo $\varphi: G \to H$ é uniformemente contínuo.

NOTA — Esta noção de continuidade uniforme coincide com a usual no caso do grupo aditivo de um espaço vetorial normado. Mas, por exemplo, considerando o grupo multiplicativo R^* dos reais > 0, a função $x \to x^2$ é uniformemente contínua no sentido do grupo R^*, embora não o seja no sentido usual. Em geral, qualquer que seja o grupo topológico G, a aplicação $m: G \times G \to G$, $m(x,y) = xy$, é uniformemente contínua no sentido da estrutura de grupo topológico de G. No caso do grupo multiplicativo R^*, a aplicação $\log: R^* \to R$ é um isomorfismo sôbre o grupo aditivo dos reais, portanto $x \to x^2$ é uma função uniformemente contínua em relação à métrica $d_1(x,y) = |\log x - \log y|$ em R^*.

12. Sejam E, F espaços vetoriais normados. Uma aplicação $\varphi: E \times E \to F$ diz-se *bilinear* quando $\varphi(x+x', y) = \varphi(x,y) + \varphi(x',y)$; $\varphi(\lambda x, y) = \lambda \cdot \varphi(x,y)$ e anàlogamente para a segunda variável. (O exemplo típico é a multiplicação de números reais.) Uma aplicação bilinear φ é contínua se, e sòmente se, existe uma constante $m > 0$ tal que $|\varphi(x,y)| \leq m|x|\,|y|$ quaisquer que sejam $x, y \in E$. Nenhuma aplicação bilinear $\neq 0$ é uniformemente contínua.

13. Seja M um subespaço do espaço métrico N. Se tôda função real contínua $f:M \to R$ fôr uniformemente contínua, então M é fechado em N.

14. Digamos que uma aplicação $f: M \to N$ tem a p. e. f. (propriedade da extensão finita) se, para cada $r > 0$ existe $s > 0$ tal que $d(x,y) < r$ implica $d(f(x), f(y)) < s$. Se f

fôr limitada (mesmo descontínua) então f tem a p. e. f. Se f tem a p. e. f. então f transforma conjuntos limitados em conjuntos limitados. Recíproca falsa: $x \to x^2$. Se f satisfaz a uma condição de Hölder então f tem a p. e. f. Se M fôr um cubconjunto convexo de um espaço vetorial normado, então tôda aplicação uniformemente contínua $f: M \to N$ tem a p. e. f. Seja $f: M \to R$ um homeomorfismo uniforme de um espaço métrico limitado M sôbre a reta R. Então, f é uniformemente contínua mas não tem a p. e. f. Se $\varphi: M \to N$ tem a p. e. f. então $\varphi_*(\mathfrak{B}_\alpha(X; M)) \subset \mathfrak{B}_{\varphi\alpha}(X; M)$.

15. Dadas duas funções reais $f, g: X \to R$, definamos $f \cup g$ e $f \cap g$ como funções de X em R assim: $(f \cup g)(x) = \text{máx.}\{f(x), g(x)\}, (f \cap g)(x) = \text{mín.}\{f(x), g(x)\}$. Se X é um espaço topológico e f, g são contínuas, então $f \cup g$ e $f \cap g$ são contínuas. Se X é um espaço métrico e f, g são uniformemente contínuas, então $f \cup g$ e $f \cap g$ são uniformemente contínuas.

16. *Espaços uniformes.* A noção de espaço uniforme é uma extensão natural dos conceitos de espaço métrico e de grupo topológico, permitindo que a idéia de aplicação uniformemente contínua tenha sentido em condições mais gerais.

Uma *estrutura uniforme* num conjunto X é uma coleção $\mathfrak{U}$ de subconjuntos $U \subset X \times X$ com as seguintes propriedades:

1) Todo $U \in \mathfrak{U}$ contém a diagonal $\Delta \subset X \times X$;
2) se $U, V \in \mathfrak{U}$ então $U \cap V \in \mathfrak{U}$;
3) se $U \in \mathfrak{U}$ e $U \subset V$ então $V \in \mathfrak{U}$;
4) se $U \in \mathfrak{U}$ então $U^- \in \mathfrak{U}$, onde $U^- = \{(y, x) \in X \times X; (x, y) \in U\}$;
5) dado $U \in \mathfrak{U}$, existe $V \in \mathfrak{U}$ tal que $(x, y) \in V$ e $(y, z) \in V$ implicam $(x, z) \in U$.

Exemplos de estruturas uniformes: *a*) Dado um espaço métrico M, seja $\mathfrak{U}$ a coleção dos conjuntos $U_\epsilon = \{(x, y) \in M \times M; d(x, y) < \epsilon\}$ onde $\epsilon > 0$ é arbitrário. *b*) Dado um grupo topológico G, seja $\mathfrak{U}$ a coleção dos conjuntos $[U] = \{(x, y) \in G \times G; xy^{-1} \in U\}$, onde U é uma vizinhança arbitrária de elemento neutro $e \in G$.

Um espaço uniforme é um par $(X, \mathfrak{U})$, onde X é um conjunto e $\mathfrak{U}$ é uma estrutura uniforme em X. Dados os espaços uniformes $(X, \mathfrak{U})$ e $(Y, \mathfrak{V})$, uma aplicação $f: X \to Y$ diz-se *uniformemente contínua* quando, para cada $V \in \mathfrak{V}$, existe $U \in \mathfrak{U}$ tal que $(x, y) \in U$ implica $(f(x), f(y)) \in V$. A composta de duas aplicações uniformemente contínuas ainda tem essa propriedade. Um *isomorfismo* de espaços uniformes é uma aplicação uniformemente contínua que possui uma inversa uniformemente contínua.

Em todo espaço uniforme X existe uma topologia natural, definida do seguinte modo: um subconjunto $A \subset X$ diz-se *aberto* quando, para cada $x \in X$, existe $U \in \mathfrak{U}$ tal que $(x, y) \in U$ implica $y \in A$. Tôda aplicação uniformemente contínua $f: X \to Y$ é contínua em relação às topologias naturais dos espaços uniformes X e Y. Duas estruturas uniformes em X são chamadas *equivalentes* quando induzem a mesma topologia em X.

Exemplo: as estruturas uniformes definidas por métricas equivalentes num espaço métrico M.

Espaços Métricos Completos

Capítulo VI

§ 1. Introdução

Dada uma seqüência (x_n) num espaço métrico M, a única maneira que possuímos de provar sua convergência consiste em exibir $x = \lim x_n$. Muitas vêzes, porém, não se necessita conhecer explìcitamente $\lim x_n$ mas apenas saber que êle existe. Daí a utilidade das condições suficientes para a existência do limite, ou seja, dos "critérios de convergência". (Por exemplo, tôda seqüência de números reais não-decrescente e limitada é convergente. Cf. Cap. IV, Ex. 4.) O mais conhecido dêstes é o *critério de Cauchy*, segundo o qual uma seqüência de números reais x_n é convergente se, e sòmente se, $\lim\limits_{m, n \to \infty} |x_m - x_n| = 0$.

Estudaremos, neste capítulo, os espaços métricos M nos quais o critério de Cauchy se aplica, isto é, uma seqüência (x_n) em M converge se, e sòmente se, $\lim\limits_{m, n \to \infty} d(x_m, x_n) = 0$.

Uma das utilidades dos espaços completos é que nêles é possível demonstrar teoremas de existência para elementos satisfazendo as condições dadas. A grosso modo, procura-se construir, passo a passo, uma seqüência de Cauchy cujos elementos x_n estão mais e mais próximos de satisfazerem às condições dadas. Sendo M completo, existe $x = \lim x_n$, ponto que deverá satisfazer exatamente a tais condições.

§ 2. Seqüências de Cauchy

Diz-se que uma seqüência (x_n), num espaço métrico M, é uma *seqüência de Cauchy* quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitràriamente, é possível obter $n_0 \in N$ tal que $m, n > n_0$ implica $d(x_m, x_n) < \epsilon$.

Dada uma seqüência (x_n) no espaço métrico M ponhamos, para cada $n \in N$, $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$. Como de costume, indiquemos com $\delta(X_n)$ o diâmetro do conjunto X_n.

PROPOSIÇÃO 1 — *A seqüência* (x_n) *é de Cauchy se, e sòmente se,* $\lim_{n \to \infty} \delta(X_n) = 0$.

Demonstração: Com efeito, $d(x_m, x_n) < \epsilon$ para quaisquer $m, n > n_0$ equivale a dizer que $\delta(X_n) \leq \epsilon$ para todo $n > n_0$.

COROLÁRIO — *Tôda seqüência de Cauchy é limitada.*

Com efeito, $X_1 = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\} \cup X_n$. Sendo (x_n) uma seqüência de Cauchy, existe n_0 tal que $n > n_0$ implica $\delta(X_n) < 1$. Logo, X_1 é limitado, isto é, a seqüência (x_n) é limitada.

PROPOSIÇÃO 2 — *a) Tôda subseqüência de uma seqüência de Cauchy é também uma seqüência de Cauchy.*

b) Tôda seqüência convergente é uma seqüência de Cauchy.

c) A imagem de uma seqüência de Cauchy por uma aplicação uniformemente contínua é uma seqüência de Cauchy.

Demonstração: *a)* Óbvio.

b) Seja $\lim x_n = x$. Dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $m, n > n_0$ implica $d(x_m, x) < \epsilon/2$ e $d(x_n, x) < \epsilon/2$ donde $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x_n, x) < \epsilon$. Portanto, (x_n) é uma seqüência de Cauchy.

c) Seja $f : M \to N$ uniformemente contínua e seja (x_n) uma seqüência de Cauchy em M. Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(y)) < \epsilon$ sempre que $x, y \in M$ e $d(x, y) < \delta$. Existe também n_0 tal que $m, n > n_0$ implica $d(x_m, x_n) < \delta$ e portanto $d(f(x_m), f(x_n)) < \epsilon$. Isto mostra que $(f(x_n))$ é uma seqüência de Cauchy em N.

COROLÁRIO — *Duas métricas uniformemente equivalentes no mesmo espaço* M *determinam as mesmas seqüências de Cauchy em* M.

EXEMPLOS

1. Seja Q o conjunto dos números racionais, com sua métrica natural $d(x, y) = |x - y|$. Seja (x_n) uma seqüência de números racionais tal que $x = \lim x_n$ é irracional. (Por exemplo, $x_1 = 3$; $x_2 = 3, 1$; $x_3 = 3, 14$;... ... $x = \pi$.) A seqüência (x_n) é convergente em R e portanto é uma seqüência de Cauchy em R, pela parte *b)* da Prop. 2. Os têrmos x_n pertencem todos a Q, cuja métrica é induzida de R, logo, (x_n) é uma seqüência de Cauchy em Q, a qual não converge neste espaço. Mais geralmente, se X é um subconjunto não-fechado de um espaço métrico M, existe uma seqüência de

pontos $x_n \in X$ que converge em M para um ponto $x \in M - X$. Considerada como uma seqüência de pontos no subespaço X, (x_n) é uma seqüência de Cauchy não-convergente.

2. Se $f : M \to N$ é apenas contínua, pode-se ter uma seqüência de Cauchy (x_n) em M cuja imagem $(f(x_n))$ não é uma seqüência de Cauchy em N. Por exemplo, sejam $M = R - \{0\}$, $N = R$ e $f(x) = 1/x$. A seqüência de pontos $x_n = 1/n$ é de Cauchy em M mas $(f(x_n)) = (1, 2, 3, \ldots)$ não é uma seqüência de Cauchy. A propriedade de transformar seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy não é característica das aplicações uniformemente contínuas. Por exemplo, $f : R \to R$, definida por $f(x) = x^2$ tem esta propriedade. Mais geralmente, se M é tal que tôda seqüência de Cauchy em M é convergente (vide § 3) então tôda aplicação contínua $f : M \to N$ (uniformemente contínua ou não) transforma seqüências de Cauchy em seqüências de Cauchy.

3. Seja $P = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$ com a métrica induzida da reta. Uma seqüência (x_n) num espaço métrico M determina uma aplicação $f : P \to M$, com $f(1/n) = x_n$. Como P é um espaço discreto, f é sempre contínua. Para que f seja uniformemente contínua, é necessário e suficiente que (x_n) seja uma seqüência de Cauchy. Com efeito, sendo $n \to 1/n$ uma seqüência convergente em R e portanto de Cauchy em P, sua imagem $(f(1/n)) = (x_n)$ será de Cauchy em M se f fôr uniformemente contínua. Reciprocamente, se (x_n) é de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que $m, n > n_0$ implica $d(x_m, x_n) < \epsilon$. Seja $\delta = 1/n_0^2$. A menor distância entre 2 pontos distintos de conjunto $\{1, 1/2, \ldots, 1/n_0\}$ é $1/(n_0 - 1) - 1/n_0 = 1/(n_0 - 1)n_0 > 1/n_0^2 = \delta$. Portanto, se $d(1/m, 1/n) < \delta$, ou $m = n$ ou então $m, n \geq n_0$. Em qualquer caso, $d(1/m, 1/n) < \delta$ implica $d(f(1/m), f(1/n)) = d(x_m, x_n) < \epsilon$; logo, f é uniformemente contínua.

4. Seja $M = M_1 \times \ldots \times M_k$ um produto cartesiano de espaços métricos. Uma seqüência de pontos $x_n = (x_{n1}, \ldots, x_{nk}) \in M$ é uma seqüência de Cauchy se, e sòmente se, para cada $i = 1, \ldots, k$, a seqüência de i-ésimas coordenadas $(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}, \ldots)$ é de Cauchy em M_i. Com efeito, sejam $P = \{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$ e $f : P \to M$, $f(1/n) = x_n$. Em virtude do exemplo acima e do Ex. 11, Cap. V, as seguintes afirmações são equivalentes: i) (x_n) é uma seqüência de Cauchy em M; ii) $f : P \to M$ é uniformemente contínua; iii) cada $f_i : P \to M_i$, definida por $f_i(1/n) = x_{ni}$, é uniformemente contínua; iv) cada seqüência de coordenadas $(x_{ni})_{n \in N}$, é de Cauchy em M_i.

Proposição 3 — *Seja (x_n) uma seqüência de Cauchy num espaço métrico M. Se alguma subseqüência (x_{n_k}) converge para um ponto $x \in M$, então (x_n) também converge para o ponto x.*

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, existe n' tal que $n_k > n'$ implica $d(x_{n_k}, x) < \epsilon/2$. Existe também n'' tal que $d(x_m, x_n) < \epsilon/2$ sempre que $m, n > n''$.

Seja $n_0 = \text{máx.}\ \{n', n''\}$. Se $n > n_0$, podemos escolher $n_k > n_0$ e teremos $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Logo, $x_n \to x$.

§ 3. Espaços Completos

Diz-se que um espaço métrico M é *completo* quando tôda seqüência de Cauchy em M é convergente.

Segue-se da Prop. 2, item *c*) que se M é completo e N é uniformemente homeomorfo a M então N é também completo. Mas se M e N são apenas homeomorfos então M pode ser completo sem que N o seja. Em outras palavras, ser completo não é uma propriedade topológica.

EXEMPLO

5. Seja $P = \{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$. Com a métrica $d(x, y) = |x-y|$, induzida da reta, P não é completo, pois $(1/n)$ é uma seqüência de Cauchy não convergente em P. Sendo P discreto, a métrica $d'(x, y) = 1$ para $x \neq y$ e $d'(x, y) = 0$ é equivalente à métrica d. Mas o espaço (P, d') é completo pois tôda seqüência de Cauchy relativamente a d' deve ser constante a partir de uma certa ordem, e portanto convergente.

O exemplo mais importante de espaço métrico completo é a reta. A proposição que se segue é devida a Cauchy.

PROPOSIÇÃO 4 — *O conjunto R dos números reais, com a métrica usual $d(x, y) = |x - y|$, é um espaço métrico completo.*

Demonstração: Seja (x_n) uma seqüência de Cauchy de números reais. Para cada n, ponhamos $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ e $a_n = \inf. X_n$. Como

(x_n)é limitada e $X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \ldots$, obtemos assim uma seqüência crescente limitada de números reais $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$. Seja $a = \lim a_n$. Afirmamos que $a = \lim x_n$. Pela Prop. 3, basta demonstrar que existe uma subseqüência (x_{n_k}) convergindo para a. De acôrdo com a Prop. 3, Cap. IV, é suficiente provar que todo intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$, $\epsilon > 0$, contém pontos x_n com n arbitràriamente grande. Ora, dado qualquer n_1, existe $m > n_1$ com $a-\epsilon < a_m < a + \epsilon$. Sendo $a_m = \inf. X_m$, $a_m < a+\epsilon$ implica que existe $n > m$ (e portanto $n > n_1$) tal que $a_m \leq x_n < a + \epsilon$, isto é, $x_n \in (a + \epsilon, a + \epsilon)$, como queríamos demonstrar.

Na proposição abaixo, $M = M_1 \times \ldots \times M_k$ pode ser tomado com qualquer das 3 métricas usuais.

Proposição 5 — *O produto cartesiano $M = M_1 \times \ldots \times M_k$ é completo se, e sòmente se, cada um dos fatôres $M_1, \ldots, M_k$ é um espaço métrico completo.*

Demonstração: Se cada M_i é completo, dada uma seqüência de Cauchy (x_n) em M, cada uma das seqüências de coordenadas $(x_{ni})_{n \in N}$ é de Cauchy em M_i (Ex. 4) e portanto convergente em M_i. Segue-se que (x_n) converge em M (Ex. 9, Cap. IV) e portanto M é completo. Recìprocamente, se um dos fatôres (digamos, M_1 para simplificar a escrita) não fôsse completo, existiria uma seqüência de Cauchy (y_n) não-convergente em M_1. Fixemos arbitràriamente pontos $a_2 \in M_2, \ldots, a_k \in M_k$. A seqüência de pontos $x_n = (y_n, a_2, \ldots, a_k) \in M$ seria de Cauchy, pois $d(x_m, x_n) = d(y_m, y_n)$ e não convergiria em M, logo M não seria completo.

Corolário — *O espaço euclidiano R^n é completo.*

Proposição 6 — *Todo subespaço fechado de um espaço métrico completo é também completo. Recìprocamente, um subespaço completo de qualquer métrico é fechado.*

Demonstração: Seja $F \subset M$ fechado, M completo. Dada uma seqüência de Cauchy formada por elementos $x_n \in F$, existe $\lim x_n = x \in M$. Como F é fechado em M, $x \in F$ (Prop. 7, Cap. IV). Logo, F é completo. Recìprocamente, se $S \subset M$ é completo e uma seqüência de pontos $x_n \in S$ converge para um ponto $x \in M$, então (x_n) é uma seqüência de Cauchy [Prop. 2, item *b*]. Sendo S completo, existe $x' \in S$, $x' = \lim x_n$. Pela unicidade do limite, $x' = x$. Logo, $x \in S$ e portanto S é fechado em M.

Proposição 7 — *Sejam X um conjunto qualquer e M um espaço métrico completo. Dada qualquer aplicação $\alpha : X \to M$, o espaço $\mathfrak{B}_\alpha (X; M) = \{f : X \to M;\ d(f, \alpha) < \infty\}$ é completo relativamente à métrica $d(f, g) = sup. \{d(f(x), g(x));\ x \in X\}$.*

Demonstração: Seja (f_n) uma seqüência de Cauchy em $\mathfrak{B}_\alpha(X; M)$.

Para cada $x \in X$, temos $d(f_m(x), f_n(x)) \leq d(f_m, f_n)$ e portanto $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots)$ é uma seqüência de Cauchy em M. Sendo M completo existe, para cada $x \in X$ o limite $f(x) = \lim_n f_n(x) \in M$. Isto define uma aplicação $f : X \to M$ para a qual a seqüência de aplicações f_n converge simplesmente. Para mostrar que a convergência é uniforme, tomemos arbitràriamente $\epsilon > 0$. Existe $n_0 \in N$ tal que $m, n > n_0$ implica $d(f_m, f_n) < \epsilon$ e portanto $d(f_m(x), f_n(x)) < \epsilon$ para todo $x \in X$. Assim, se $n > n_0$, temos $d(f(x), f_n(x)) = \lim_{m \to \infty} d(f_m(x), f_n(x)) \leq \epsilon$, seja qual fôr $x \in X$. Logo, $d(f, f_n) \leq \epsilon$ para todo $n > n_0$. Em particular $d(f, f_n) < \infty$, donde $f \in \mathfrak{B}_\alpha(X; M)$ e, como queríamos demonstrar, $\lim f_n = f$ no espaço $\mathfrak{B}_\alpha(X; M)$.

Corolário — *Dada $\alpha : X \to M$, seja $\mathfrak{C}_\alpha(X; M)$ o conjunto das aplicações contínuas $f : X \to M$ tais que $d(f, \alpha) < \infty$. Se M é completo, $\mathfrak{C}_\alpha(X; M)$ também é completo em relação à métrica uniforme $d(f, g) = \sup.\{d(f(x), g(x)); x \in X\}$.*

Com efeito, $\mathfrak{C}_\alpha(X; M)$ é um subconjunto fechado do espaço métrico completo $\mathfrak{B}_\alpha(X; M)$, de acôrdo com o Corolário da Prop. 17, Cap. III.

EXEMPLOS

6. Seja $I = [a, b]$ um intervalo fechado e limitado da reta. O conjunto $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}_0(I; R)$ das funções contínuas limitadas em I é completo relativamente à norma $|f - g| = \sup. \{|f(x) - g(x)|; x \in I\}$. Entretanto, se considerarmos em $\mathfrak{C}_0$ a norma $|f - g|_1 = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$, $\mathfrak{C}_0$ não será mais completo. A fim de tornar $\mathfrak{C}_0$ completo relativamente a esta norma, é preciso acrescentar-lhe as funções integráveis no sentido de Lebesgue.

7. O intervalo aberto $(-1, +1)$ não é completo em relação à métrica usual $d(x, y) = |x - y|$, pois não é um subconjunto fechado da reta. Mas o homeomorfismo $h : (-1, +1) \to R$, definido por $h(x) = x/(1 - x)$, define em $(-1, +1)$ uma métrica $d_1(x, y) = |h(x) - h(y)|$ relativamente à qual $(-1, +1)$ é um espaço isométrico à reta R e portanto completo.

8. Todo subconjunto aberto A de um espaço métrico completo M é homeomorfo a um espaço métrico completo. Com efeito, seja $f : M \to R$ uma função contínua que se anule exatamente nos pontos de $M - A$, como por exemplo, $f(x) = d(x, M - A)$. Definamos $\varphi : A \to R$ pondo $\varphi(x) = 1/f(x)$; φ é contínua e $\varphi(x)$ tende para ∞ quando x se aproxima da fronteira de A. O gráfico de φ, $G = \{(x, \varphi(x)); x \in A\}$ é um subconjunto fechado de $M \times R$, pois $G = \{(x, t) \in M \times R; tf(x) = 1\}$. (*Atenção*: o Ex. 20 do Cap. III, segundo o qual o gráfico de uma função contínua

$f: M \to R$ é um subconjunto fechado do produto $M \times R$, não se aplica aqui, pois φ não é definida em todo o espaço M, nem num subconjunto fe-

Um espaço completo, homeomorfo a $R^2 - \{0\}$.

chado de M.) Logo, G é um espaço completo, com a métrica induzida de $M \times R$. Mas sabemos que a projeção de $A \times R$ sôbre A define um homeomorfismo de G sôbre A. Isto demonstra a afirmação feita. Segue-se que

$$d_1(x, y) = \left| \frac{1}{d(x, M - A)} - \frac{1}{d(y, M - A)} \right| + d(x, y)$$

é uma métrica de A, equivalente à métrica original, e A é completo relativamente a d_1. (Para uma extensão dêste resultado, vide Cap. IX, Corolário da Prop. 7.)

9. Seja E um espaço vetorial normado. Uma série Σx_n em E diz-se *absolutamente convergente* quando a série de números reais $\Sigma |x_n|$ é convergente. Se E fôr completo relativamente à sua norma, tôda série absolutamente convergente em E é convergente. Com efeito, sejam $s_n = x_1 + \ldots + x_n$ e $\sigma_n = |x_1| + \ldots + |x_n|$. Tem-se $|s_m - s_n| \leq |\sigma_m - \sigma_n|$. Como a seqüência (σ_n) é convergente, e portanto de Cauchy, segue-se que (s_n) é uma seqüência de Cauchy em E. Sendo E completo, (s_n) converge, isto é, a série Σx_n é convergente.

10. A recíproca é falsa. A série de números reais $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + \ldots$ é convergente mas não é absolutamente convergente pois $1 + 1/2 + 1/3 + \ldots = \infty$.

11. *O espaço de Hilbert das seqüências de quadrado somável.* Seja H o conjunto das seqüências $x = (x_1, x_2, \ldots, x_i \ldots)$ de números reais tais que $\Sigma x_i^2 < \infty$. Vamos demonstrar que H é um espaço vetorial, munido de um produto interno em relação ao qual H é completo. Dado $x = (x_i) \in H$, ponhamos $|x| = \sqrt{\Sigma x_i^2}$.

LEMA — *Dados* $x = (x_i)$ *e* $y = (y_i)$ *em* H, *a série de números reais* $\Sigma x_i y_i$ *é absolutamente convergente e* $|\Sigma x_i y_i| \leq \Sigma |x_i y_i| \leq |x| \cdot |y|$.

Demonstração: Para cada $k \in N$ temos, em virtude da desigualdade de Cauchy (Cap. I, Ex. 2):

$$\sum_{i=1}^{k} |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k} y_i^2} \leq |x| \cdot |y|.$$

Logo, as somas parciais da série de têrmos não-negativos $\Sigma |x_i y_i|$ são limitadas pelo número $|x| \cdot |y|$. Segue-se do Ex. 4, Cap. IV que $\Sigma |x_i y_i|$ converge para um limite $\leq |x| \cdot |y|$. Pelo Ex. 9 acima, $\Sigma x_i y_i$ também converge, e o lema fica estabelecido.

Resulta do lema que se $x = (x_i)$ e $y = (y_i)$ pertencem a H, então $x + y = (x_i + y_i)$ também pertence a H pois, para cada $k \in N$,

$$\sum_{i=1}^{k} (x_i + y_i)^2 = \sum_{1}^{k} x_i^2 + \sum_{i=1}^{k} y_i^2 + 2 \sum_{i}^{k} x_i y_i.$$

Fazendo $k \to \infty$, vem $\Sigma (x_i + y_i)^2 = \Sigma x_i^2 + \Sigma y_i^2 + 2 \Sigma x_i y_i < \infty$, como queríamos demonstrar. Também se $\lambda \in R$ e $x \in H$, $\lambda x = (\lambda x_i) \in H$, como se verifica imediatamente. Em relação às operações $x + y$ e λx acima definidas, H é um espaço vetorial, no qual está definido um produto interno $< x, y > = \Sigma x_i y_i$, com as propriedades usuais: $< x, y > = < y, x >$, $<x + y, z> = <x, z> + <y, z>$, $<\lambda x, y> = \lambda <x, y>$, $< x, x > \geq 0$ e, para $x \neq 0$, $< x, x > > 0$. Segue-se do lema que $|< x, y >| \leq |x| \cdot |y|$. A aplicação $x \to |x| = \sqrt{< x, x >}$ é uma norma em H. Com efeito, temos $|x + y| = \sqrt{<x + y, x + y>} = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + 2 < x, y >} \leq \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + 2|< x, y >|} \leq \sqrt{|x|^2 + |y|^2 + 2|x| \cdot |y|} = |x| + |y|$. As demais propriedades da norma são imediatas.

O espaço H é completo relativamente à métrica $|x - y| = \sqrt{\Sigma (x_i - y_i)^2}$. Com efeito, seja (x_n) uma seqüência de Cauchy em H. Para cada $n \in N$, temos $x_n = (x_{n1}, \ldots, x_{ni}, \ldots)$. Fixado qualquer $i \in N$, temos $|x_{mi} - x_{ni}| \leq |x_m - x_n|$, logo, $(x_{ni})_{n \in N}$ é uma seqüência de Cauchy de números reais. Portanto, para cada $i \in N$, existe um número real a_i tal que $\lim_{n \to \infty} x_{ni} = a_i$. Seja $a = (a_1, a_2, \ldots, a_i \ldots)$. Dado arbitràriamente $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in N$ tal que $m, n > n_0$ implica $\Sigma_i (x_{mi} - x_{ni})^2 = |x_m - x_n|^2 < \epsilon^2$. Portanto, para todo $k \in N$ e $m, n > n_0$, tem-se

$$\sum_{i=1}^{k} (x_{mi} - x_{ni})^2 < \epsilon^2.$$

Fazendo $m \to \infty$ na desigualdade acima (e mantendo k, n fixos), resulta que, para todo $k \in N$, tem-se

$$\sum_{i=1}^{k} (a_i - x_{ni})^2 \leq \epsilon^2, \text{ seja qual fôr } n > n_0.$$

Fazendo agora $k \to \infty$, obtemos:

$$\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - x_{ni})^2 \leq \epsilon^2, \text{ para todo } n > n_0.$$

Em particular, $a - x_n \in H$ para todo $n > n_0$. Como $x_n \in H$, segue-se que $a = (a - x_n) + x_n \in H$. Além disso, a última desigualdade pode ser escrita $|a - x_n| \leq \epsilon$ para todo $n > n_0$. Portanto, $x_n \to a$ em H, concluindo a demonstração de que o espaço de Hilbert H é completo.

Observações — 1) No espaço de Hilbert H existe uma seqüência de projeções $p_i : H \to R$, $p_i(x) = x_i$. Cada projeção p_i é uma contração fraca e portanto é uniformemente contínua. Ficou estabelecido no argumento acima que se (x_n) é uma seqüência de Cauchy em H e, para cada i, $p_i(x_n) \to a$ então $a = (a_1, \ldots, a_i, \ldots) \in H$ e $x_n \to a$ em H. Mas é importante notar que, ao contrário do que ocorre num produto cartesiano, uma seqüência (x_n) em H pode ter cada uma de suas coordenadas $x_{ni} = p_i(x_n)$ convergindo para um ponto $a_i \in R$, com $a = (a_1, \ldots a_i, \ldots) \in H$, sem que $x_n \to a$ em H. Por exemplo, seja $x_n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ o ponto que tem uma coordenada 1 no n-ésimo lugar e as demais coordenadas zero. Para cada $i \in N$, $\lim_{n \to \infty} x_{ni} = 0$ mas x_n não converge para 0 em H pois $|x_n| = 1$ para todo $n \in N$. Outra maneira de formular esta observação é dizer que, dada uma aplicação contínua $f : M \to H$ (onde M é um espaço métrico) tem-se $p_i \circ f = f_i : M \to R$ contínua para todo $i \in N$. Entretanto, pode acontecer que as coordenadas $f_i : M \to R$ sejam tôdas contínuas sem que f o seja.

2) Chama-se *espaços de Hilbert* a todo espaço vetorial E, munido de um produto interno $<x, y>$ e completo relativamente à norma $|x| = \sqrt{<x, x>}$. O espaço R^n, com o produto interno $<x, y> = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$, é um exemplo de espaço de Hilbert (de dimensão finita), do qual H é uma extensão natural.

§ 4. Extensão de uma Aplicação Uniformemente Contínua

Diz-se que um subconjunto S de um espaço topológico X é *denso* em X quando seu fecho $\overline{S}$ coincide com o espaço inteiro X. Isto equivale a afir-

mar que todo aberto não-vazio em X contém pontos de S, ou ainda, que o complementar de S não possui pontos interiores.

Para que um subconjunto S de um espaço métrico M seja denso em M é necessário e suficiente que cada ponto $x \in M$ seja limite de uma seqüência de pontos $x_n \in S$.

EXEMPLOS

12. O conjunto Q dos números racionais é denso na reta R; também o conjunto dos números irracionais é denso em R. O conjunto Q^n dos pontos de coordenadas racionais é denso no espaço euclidiano R^n. Mais geralmente, se, para $i = 1, 2, \ldots, n$, S_i é denso no espaço M_i, então $S_1 \times \ldots \times S_n$ é denso no produto $M_1 \times \ldots \times M_n$, pois $\overline{S_1 \times \ldots \times S_n} = \overline{S}_1 \times \ldots \times \overline{S}_n = M_1 \times \ldots \times M_n$. Nenhum subconjunto próprio de um espaço discreto pode ser denso.

13. Sejam M, N espaços métricos, S um subespaço de M e $f : S \to N$ uma aplicação contínua. Uma aplicação contínua $\overline{f} : M \to N$ diz-se uma *extensão contínua* de f quando $\overline{f}(x) = f(x)$ para todo $x \in S$. Isto significa que $\overline{f}|S = f$, ou seja, $\overline{f} \circ i = f$, onde $i : S \to M$ é a aplicação de inclusão. Um dos problemas mais importantes da Topologia é o de determinar condições segundo as quais uma aplicação $f : S \to N$ pode ser contìnuamente estendida ao espaço inteiro. Por exemplo, um famoso teorema, devido a Brouwer, afirma que se $S^{n-1} = \{x \in R^n; |x| = 1\}$ é a esfera unitária do espaço euclidiano e $D^n = \{x \in R^n; |x| \leq 1\}$ é o disco unitário, a aplicação identidade $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ não possui uma extensão contínua $\overline{f} : D^n \to S^{n-1}$. (Vide Hurewicz e Wallman, "Dimension Theory", Princeton Univ. Press, Pág. 40.) Uma demonstração elementar do Teorema de Brouwer em dimensão 2 é sugerida no Exerc. 33 do Cap. VII.

Para $n = 1$, o teorema de Brouwer reduz-se a afirmar que não existe uma aplicação contínua $\varphi : [-1, +1] \to \{-1, +1\}$ tal que $\varphi(-1) = -1$, $\varphi(+1) = +1$, o que decorre imediatamente de ser o intervalo $[-1, +1]$ conexo: se φ existisse, $\varphi^{-1}(-1)$ e $\varphi^{-1}(+1)$ seriam dois subconjuntos não-vazios, fechados, disjuntos, no intervalo $[-1 +1]$, tais que $[-1, +1] = \varphi^{-1}(-1) \cup \varphi^{-1}(+1)$.

Consideremos o problema de estender contìnuamente $f : S \to N$ no caso particular em que S é denso em M. Neste caso, se existir uma extensão contínua $\overline{f} : M \to N$, ela é única pois se $\bar{g} : M \to N$ é contínua e coincide com $\overline{f}$ nos pontos de S, então o conjunto dos pontos $x \in M$ tais que $\overline{f}(x) = \bar{g}(x)$ é fechado em M e contém S, logo coincide com o espaço inteiro M. Assim, $\overline{f} = \bar{g}$.

Uma condição suficiente para a existência da extensão $\overline{f} : M \to N$ é fornecida pela proposição abaixo.

PROPOSIÇÃO 8 — *Sejam S um subconjunto denso de um espaço métrico M e $f : S \to N$ uma aplicação uniformemente contínua, onde N é um espaço métrico completo. Existe uma única extensão contínua $\overline{f} : M \to N$, a qual é uniformemente contínua.*

Demonstração: A unicidade foi estabelecida acima. Quanto à existência, dado qualquer $a \in M$, seja qual fôr a seqüência de pontos $x_n \in S$, com $x_n \to a$, a seqüência $(f(x_n))$ é de Cauchy em N, pois f é uniformemente contínua. Como N é completo, $(f(x_n))$ converge em N. Segue-se da Prop. 12, Cap. IV, que existe $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \overline{f}(a)$ para cada $a \in M$. Como $f : S \to M$ é contínua, temos $\overline{f}(a) = f(a)$ para $a \in S$. A aplicação $\overline{f} : M \to N$ assim definida é contínua, em virtude da Prop. 14, Cap. IV. Mas demonstraremos diretamente que $\overline{f}$ é uniformemente contínua, sem apêlo àquela proposição. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, como f é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in S$ e $d(x, y) < \delta$ então $d(f(x), f(y)) < \epsilon$. Se, agora, $\bar{x}, \bar{y} \in M$ e $d(\bar{x}, \bar{y}) < \delta$ então existem seqüências de pontos $x_n, y_n \in S$ com $x_n \to \bar{x}$ e $y_n \to \bar{y}$. Com $\lim d(x_n, y_n) = d(\bar{x}, \bar{y}) < \delta$, existe n_0 tal que $d(x_n, y_n) < \delta$ para todo $n > n_0$. Segue-se que $d(f(x_n), f(y_n)) < \epsilon$ para todo $n > n_0$ e portanto $d(\overline{f}(\bar{x}), \overline{f}(\bar{y})) = \lim d(f(x_n), f(y_n)) \leq \epsilon$, o que estabelece a continuidade uniforme de $\overline{f}$. ...

OBSERVAÇÕES — 1) Ficou demonstrado acima que se $\varphi : M \to N$ é contínua e $S \subset M$ é um subconjunto denso tal que $\varphi | S$ é uniformemente contínua, então φ é uniformemente contínua, quer N seja completo quer não.

2) Se N não fôr completo, a extensão $\overline{f}$ pode não existir. Por exemplo, seja Q o conjunto dos números racionais. A aplicação identidade $f : Q \to Q$ é uniformemente contínua mas não possui uma extensão contínua $\overline{f} : R \to Q$. (Por quê?) Também a hipótese de f ser uniformemente contínua não é dispensável, como se vê no caso de $f : (0, 1] \to R$, definida por $f(x) = 1/x$. Não existe uma extensão contínua $\overline{f} : [0, 1] \to R$. Esta observação fornece uma maneira de verificar que certas funções não são uniformemente contínuas.

§ 5. Completamento de um Espaço Métrico

Mostraremos agora que, dado um espaço métrico não completo M, é possível acrescentar-lhe novos pontos, de modo a obter um espaço completo $\hat{M}$, sem alterar as distâncias dos pontos originais. Se $M \subset \hat{M}$ e $\hat{M}$ é completo, então o fecho de M em $\hat{M}$ é completo (Prop. 6). Basta pois

tomar êste fecho, em vez do espaço inteiro $\hat{M}$, isto é, podemos sempre supor que M é denso em $\hat{M}$. O espaço $\hat{M}$ será chamado o *completamento* de M. A definição formal é a seguinte:

Um *completamento* de um espaço métrico M é um par $(\hat{M}, f)$, onde $f : M \to \hat{M}$ é uma imersão isométrica, $\hat{M}$ é completo e $f(M)$ é denso em $\hat{M}$. Às vêzes, por simplicidade, diremos que $\hat{M}$ é o completamento de M, deixando a imersão f subentendida.

EXEMPLOS

14. Se $M = (0, 1)$, com a métrica usual, então $\hat{M} = [0, 1]$ e $f : (0, 1) \to$ $\to [0, 1]$, $f(x) = x$, constituem um completamento $(\hat{M}, f)$ de M.

15. Se M já é completo, todo completamento $f : M \to \hat{M}$ de M é trivial, pois f é necessàriamente sôbre $\hat{M}$. Com efeito, sendo f uma imersão isométrica, $f(M)$ é isométrico a M, donde completo e portanto fechado em $\hat{M}$. Sendo também denso em $\hat{M}$, tem-se $f(M) = \hat{M}$.

A proposição que se segue estabelece a unicidade do completamento. (A menos de uma isometria, naturalmente.)

PROPOSIÇÃO 9 — *Sejam* $(\hat{M}, f)$ *e* $(\widetilde{M}, g)$ *completamentos do mesmo espaço métrico* M. *Existe uma única isometria* $\varphi : \hat{M} \to \widetilde{M}$ *tal que* $\varphi \circ f = g$.

Demonstração: Se $\xi : \hat{M} \to \widetilde{M}$ e $\varphi : \hat{M} \to \widetilde{M}$ são contínuas e $\varphi \circ f =$ $= g = \xi \circ f$ então $\varphi | f(M) = \xi | f(M)$. Como $f(M)$ é denso em $\hat{M}$, segue-se que $\varphi = \xi$. Isto prova a unicidade de φ. Para demonstrar a existência, definamos $\varphi_0 : f(M) \to$ $\to \widetilde{M}$ pondo $\varphi_0(f(x)) = g(x)$, $x \in M$. É claro que φ_0 é uma imersão isométrica de $f(M)$ em $\widetilde{M}$. De acôrdo com a Prop. 8, existe uma única aplicação contínua $\varphi : \hat{M} \to \widetilde{M}$ que estende φ_0. Dados $\bar{x}, \bar{y} \in \hat{M}$, existem seqüências de pontos $x_n, y_n \in f(M)$ tais que $x_n \to \bar{x}$, $y_n \to \bar{y}$. Tem-se $d(\varphi(\bar{x}), \varphi(\bar{y})) = \lim d(\varphi_0(x_n), \varphi_0(y_n)) = \lim d(x_n, y_n) = d(\bar{x}, \bar{y})$. Logo, φ é uma imersão isométrica de $\hat{M}$ em $\widetilde{M}$. Como $\hat{M}$ é completo, $\varphi(\hat{M})$ também o é. Assim, $\varphi(\hat{M})$ é fechado em $\widetilde{M}$. Como φ estende φ_0, temos $\varphi(\hat{M}) \supset \varphi_0(\hat{M}) =$

$= g(M)$ e portanto $\varphi(\hat{M})$ é denso em $\widetilde{M}$. Sendo ao mesmo tempo fechado e denso em $\widetilde{M}$, $\varphi(\hat{M}) = \widetilde{M}$, como devíamos demonstrar.

EXEMPLOS

16. A noção de completamento não é topológica. Se tomarmos, no mesmo espaço M, duas métricas equivalentes d e d', os espaços métricos (M, d) e (M, d') podem ter completamentos não homeomorfos. Por exemplo, a métrica natural no intervalo aberto $(0, 2\pi)$ é equivalente à métrica $d'(x, y) = \sqrt{(\cos x - \cos y)^2 + (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y)^2}$ pois d' é induzida pelo homeomorfismo $h : (0, 2\pi) \to S^1 - \{p\}$, onde $S^1 = \{(x, y) \in R^2; x^2 + y^2 = = 1\}$ é o círculo unitário do plano, $p \in S^1$ é o ponto de coordenadas $(0, 1)$ e $h(x) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$. O completamento de $(0, 2\pi)$ em relação à métrica usual é $[0, 2\pi]$. Relativamente à métrica d', o completamento de $(0, 2\pi)$ é o círculo S^1 pois $h : ((0, 2\pi), d') \to S_1 - \{p\}$ é uma imersão isométrica, cuja imagem $S^1 - \{p\}$ é densa em S^1. Evidentemente, o intervalo fechado $[0, 2\pi]$ não é homeomorfo ao círculo S^1. (O complementar de qualquer ponto de S^1 é conexo enquanto o complementar de um ponto interior de $[0, 2\pi]$ é desconexo.)

17. Geralmente, para obter o completamento de um espaço métrico M, toma-se uma imersão isométrica $f : M \to N$, N completo, e põe-se $\hat{M} = f(M)$.

Demonstraremos agora a existência do completamento.

PROPOSIÇÃO 10 — *Todo espaço métrico M possui um completamento.*

Demonstração: Para cada $x \in M$, seja $d_x : M \to R$ a função contínua definida por $d_x(y) = d(x, y)$, $y \in M$. Foi observado no Ex. 16 do Cap. I que, para $x, x' \in M$ quaisquer, $d(d_x, d_y) < \infty$, logo existe uma aplicação $\alpha : M \to R$ tal que $d_x \in \mathfrak{C}_\alpha(M; R)$ para todo $x \in M$. Foi também observado que a aplicação contínua $\varphi : M \to \mathfrak{C}_\alpha(M; R)$, definida por $\varphi(x) = d_x$ é uma imersão isométrica. Sendo $\mathfrak{C}_\alpha(M; R)$ um espaço métrico completo (Corolário da Prop. 7), pomos $\hat{M} = \overline{\varphi(M)}$ e temos um completamento $(\hat{M}, \varphi)$ do espaço M.

OBSERVAÇÕES: 1) Na Proposição 10 acima, é natural escolher $\alpha = d_{x_0}$, para um certo $x_0 \in M$. Seja como fôr, a imersão isométrica $\varphi : M \to \to \mathfrak{C}_\alpha(M; R)$ nunca é sôbre $\mathfrak{C}_\alpha(M; R)$. Com efeito, as funções $d_x \in \varphi(M)$ são tôdas contrações fracas, pois $|d_x(y) - d_x(z)| = |d(x, y) - d(x, z)| \leq \leq d(y, z)$. Ora, escolhendo $y_0 \neq x_0$ em M, a função $f = 2\, d_{y_0} - d_{x_0}$ per-

tence evidentemente a $\mathfrak{C}_\alpha(M; R)$ mas, como $f(x_0) - f(y_0) = 3\, d(x_0, y_0)$, f não é uma contração fraca e portanto não pertence a $\varphi(M)$.

2) Se quisermos obter uma imersão isométrica de M no espaço $\mathfrak{C}_0(M; R)$ das funções reais contínuas limitadas, basta considerar a isometria $\xi : \mathfrak{C}_\alpha(M; R) \to \mathfrak{C}_0(M; R)$, definida por $\xi(f) = f - \alpha$, e tomar $\psi = \xi \circ \varphi : M \to \mathfrak{C}_0(M; R)$ em vez de φ. Podemos ainda supor que α não pertence a $\psi(M)$, conforme a observação 1) acima, e então teremos $\psi(x) \neq 0$ para todo $x \in M$. A vantagem de tomar ψ é que $\mathfrak{C}_0(M; R)$ é um espaço vetorial (normado, completo) enquanto que $\mathfrak{C}_\alpha(M; R)$ nem sempre o é.

3) Outra maneira de obter um completamento para o espaço métrico M consiste em imitar o processo de Cantor para definir os números reais a partir dos racionais. Considera-se o conjunto $C(M)$ de tôdas as seqüências de Cauchy em M. Dadas $x = (x_n)$ e $y = (y_n)$ em $C(M)$, tem-se $|d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \leq d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n)$, *cf.* Ex. 1, item *f*), Cap. II. Logo, $(d(x_n, y_n))$ é uma seqüência de Cauchy de números reais. Existe portanto $\lim d(x_n, y_n)$. Definindo-se $d(x, y) = \lim d(x_n, y_n)$, vê-se que d é uma pseudométrica em $C(M)$. Pelo processo descrito no § 4, Cap. I, obtém-se, a partir dessa pseudométrica, um espaço métrico $\widetilde{M} = C(M)/(\equiv)$. A aplicação $f : M \to \widetilde{M}$, que associa a cada ponto $x \in M$ a classe de equivalência da seqüência de Cauchy constante $(x, x, \ldots, x, \ldots)$ é uma imersão isométrica de M em $\widetilde{M}$. Nota-se que cada $x = (x_n) \in C(M)$ é limite da seqüência (ξ_n) em $C(M)$, onde $\xi_n = (x_n, x_n, \ldots, x_n, \ldots)$. Segue-se daí que $f(M)$ é denso em $\widetilde{M}$ e que, dada qualquer seqüência de Cauchy (x_n) em M, $(f(x_n))$ converge em $\widetilde{M}$. Um lema de fácil demonstração assegura que, se um espaço métrico $\widetilde{M}$ possui um subconjunto denso S tal que tôda seqüência de Cauchy em S converge para um ponto de $\widetilde{M}$, então $\widetilde{M}$ é completo. Resulta, pois, que $\widetilde{M}$ é completo e $(\widetilde{M}, f)$ é um complemento de M.

EXEMPLO

18. Chama-se *espaço de Banach* a todo espaço vetorial normado e completo relativamente a essa norma. Os espaços euclidianos R^n são espaços de Banach em relação a qualquer das 3 normas usuais (mas "de Hilbert" sòmente em relação à norma $|x| = \sqrt{\Sigma\,(x^i)^2}$). Todo espaço de Hilbert é, em particular, um espaço de Banach. O espaço $\mathfrak{B}(X; E)$, das aplicações limitadas de um conjunto X num espaço de Banach E é um espaço de Banach. Também o espaço $\mathfrak{C}_0(M; E)$, das aplicações contínuas limitadas de um espaço métrico M num espaço de Banach E, é um espaço

de Banach. [Nestes dois exemplos, estamos considerando a norma "uniforme" $|f| = \sup_x |f(x)|$.] Se um espaço vetorial normado E não é completo, obtém-se um completamento $\varphi : E \to \hat{E}$. Por simplicidade, identifica-se $x \in E$ com $\varphi(x) \in \hat{E}$ e assim $E \subset \hat{E}$. Aplicando-se a Prop. 8, vê-se que as operações de adição e multiplicação por um escalar estendem-se de modo único a $\hat{E}$, que se torna assim um espaço vetorial. Também a norma de E se estende a $\hat{E}$ de modo único. Portanto, $\hat{E}$ é um espaço vetorial normado completo, isto é, um espaço de Banach, que contém E como um subespaço denso. Os detalhes dêste processo podem ser encontrados nos livros de Análise Funcional.

§ 6. Espaços de Baire

Um subconjunto S de um espaço topológico X diz-se *magro* (em X) quando é uma reunião enumerável $S = \bigcup S_n$ tal que, para cada n, $\text{int.}(\overline{S}_n) = \varnothing$.

Para que S seja magro em X é necessário e suficiente que $S \subset \bigcup F_n$ onde $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ são fechados com interior vazio em X.

Ao adotar-se esta terminologia, a intenção é destacar uma classe de conjuntos que sejam, num certo sentido, insignificantes diante do espaço inteiro. A noção de conjunto magro desempenha, em Topologia, papel semelhante ao da noção de "conjunto de medida nula" em Análise. Por exemplo, as propriedades seguintes são imediatas:

1.°) a reunião de uma família enumerável de subconjuntos magros em X é um subconjunto magro em X;

2.°) se S é magro em X e $T \subset S$, então T é magro em X. Na terminologia clássica, diz-se conjunto de 1.ª categoria, em vez de conjunto magro.

EXEMPLOS

19. Um ponto x, num espaço topológico X, tem interior não-vazio se, e sòmente se, é um ponto isolado em X. Segue-se que todo conjunto enumerável S, num espaço de Hausdorff X sem pontos isolados, é um conjunto magro em X. Em particular, o conjunto Q dos números racionais é magro na reta.

20. Um exemplo de conjunto magro não-enumerável é o seguinte: no plano R^2, seja S o conjunto dos pontos (x, y) em que pelo menos uma das coordenadas é racional. S é uma reunião enumerável de conjuntos fecha-

dos com interior vazio em R^2, a saber as retas que são paralelas a um dos eixos e cortam o outro eixo num ponto racional.

21. O *conjunto de Cantor* é o que resta do intervalo $[0, 1]$ depois da seguinte operação: retira-se primeiramente o têrço médio aberto $(1/3, 2/3)$ do intervalo $[0, 1]$. Retira-se depois o têrço médio aberto de cada um dos intervalos restantes, $[0, 1/3]$ e $[2/3, 1]$. Sobra então $[0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$. Em seguida, retira-se o têrço médio aberto de cada um dêsses intervalos e repete-se o processo indefinidamente. O conjunto K dos pontos não retirados é o conjunto de Cantor. K é um subconjunto fechado em $[0, 1]$ (e, conseqüentemente, fechado na reta), pois seu complementar em $[0, 1]$ é uma reunião de intervalos abertos. Além disso, é claro que K não contém nenhum intervalo, de modo que int.$(K) = \emptyset$ e, por conseguinte, K é um subconjunto magro da reta. Ao contrário dos dois exemplos anteriores, K não é magro em si mesmo, isto é, não é possível escrever $K = \bigcup F_n$ onde cada F_n é fechado em K e tem interior vazio *em* K. Isto resultará da Prop. 14.

22. A fronteira de todo subconjunto aberto A de um espaço topológico X é um subconjunto fechado com interior vazio e portanto magro em X. Com efeito, se $x \in$ fr.(A), tôda vizinhança de x contém pontos de A. Sendo A aberto, $A \cap$ fr.$(A) = \emptyset$. Logo, qualquer vizinhança de x contém pontos que não pertencem à fronteira de A e portanto fr.(A) tem interior vazio. Em conseqüência, a fronteira de um conjunto fechado também tem interior vazio e portanto é um conjunto magro. Com efeito, tem-se fr.(F) = fr.$(X - F)$.

Chama-se *espaço de Baire* a um espaço topológico no qual todo subconjunto magro tem interior vazio.

É nos espaços de Baire que os subconjuntos magros são, de fato, insignificantes.

Para que um espaço topológico X seja um espaço de Baire é necessário e suficiente que tôda reunião enumerável $T = \bigcup F_n$ de subconjuntos fechados com interior vazio seja um conjunto com interior vazio em X.

Enunciando a sentença acima em têrmos dos complementares $A_n = X - F_n$ obtemos o seguinte critério:

Para que um espaço topológico X seja um espaço de Baire é necessário e suficiente que tôda interseção $S = \bigcap A_n$ de uma família enumerável de abertos A_n densos em X seja um subconjunto denso em X.

Com efeito, um conjunto F tem interior vazio se, e sòmente se, $X - F$ é denso.

PROPOSIÇÃO 11 — *Todo subconjunto aberto A de um espaço de Baire X é um espaço de Baire.*

Demonstração: Devemos mostrar que a interseção $S = \bigcap A_n$ de uma família enumerável de subconjuntos $A_n \subset A$, abertos e densos em A, é um subconjunto denso em A. Seja $B_n = A_n \cup (X - \bar{A})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Como A é aberto em X, cada A_n é aberto em X e portanto cada B_n também. Além disso, os B_n são densos em X. Com efeito, temos $X = A \cup \text{fr.}(A) \cup \cup (X - \bar{A})$. Seja $x \in X$ um ponto arbitrário e seja U um aberto arbitrário de X contendo o ponto x. Se $x \in A$ então $U \cap A$ é um aberto não-vazio de A, donde $U \cap A_n = (U \cap A) \cap A_n \neq \varnothing$ pois A_n é denso em A. Se $x \in \text{fr.}(A)$ então $U \cap A \neq \varnothing$ pela definição de fronteira e daí $U \cap A_n \neq \varnothing$, pelo mesmo motivo acima. Finalmente, se $x \in X - \bar{A}$ então $U \cap (X - \bar{A}) \neq \varnothing$, evidentemente. Em qualquer hipótese $U \cap B_n \neq \varnothing$, comprovando que B_n é denso em X. Sendo X um espaço de Baire, $T = \bigcap B_n$ é um subconjunto denso de X. Como A é aberto, $T \cap A$ é denso em A. Mas $T = (\bigcap A_n) \cup (X - \bar{A}) = S \cup (X - \bar{A})$, logo, $T \cap A = S$, e assim S é denso em A, como deveríamos demonstrar.

PROPOSIÇÃO 12 — *Se todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança que é um espaço de Baire, então X é um espaço de Baire.*

Demonstração: Seja $S = \bigcap A_n$ a interseção de uma família enumerável de abertos A_n, densos em X. Mostremos que S é denso em X. Para isso, tomemos um ponto arbitrário $x \in X$ e um aberto arbitrário $U \ni x$, e mostremos que $U \cap S \neq \varnothing$. Ora, x possui uma vizinhança V que é um espaço de Baire. Seja W aberto em X, tal que $x \in W \subset U \cap V$. Pela Prop. 11, W é um espaço de Baire. Os conjuntos $A_n \cap W$ são abertos e densos em W. Logo, $\bigcap (A_n \cap W)$ é denso em W. Mas $\bigcap (A_n \cap W) = = (\bigcap A_n) \cap W = S \cap W \subset S \cap U$. Assim, $S \cap U$ não é vazio e a demonstração está concluída.

PROPOSIÇÃO 13 — *O complementar de um subconjunto magro de um espaço de Baire é um espaço de Baire. Equivalentemente: a interseção de uma família enumerável de abertos densos num espaço de Baire é um espaço de Baire.*

Demonstração: Seja $S = \bigcap A_n$, onde os A_n são abertos densos num espaço de Baire X. Para provar que S é um espaço de Baire, seja (B_n) uma família enumerável de abertos densos em S. Para cada $n \in N$, $B_n = S \cap B_n'$, onde B_n' é aberto em X. Além disso, sendo X um espaço de Baire, S é denso em X, donde cada B_n é denso em X. Com maior razão, B_n' é denso em X para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Seja (C_n) a família enumerável de abertos densos em X, definida por $C_{2n} = A_n$, $C_{2n-1} = B_n'$, ou seja, $(C_n) = (B_1', A_1, B_2', A_2, \ldots)$. Então, $\bigcap C_n$ é denso em X. Mas $\bigcap C_n = (\bigcap A_n) \cap (\bigcap B_n') =$

$= S \cap (\cap B_n') = \cap (S \cap B_n')$. Em particular, $\cap B_n$ é denso em S, como deveríamos demonstrar.

Proposição 14 — (*"Teorema de Baire"*) *Todo espaço métrico completo é um espaço de Baire.*

Demonstração: Seja M um espaço métrico completo. Dada uma família enumerável $(A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots)$ de abertos densos em M, provemos que $S = \cap A_n$ é denso em M. Devemos mostrar que uma bola aberta arbitrária B_1 em M contém algum ponto de S. Ora, como A_1 é aberto e denso, $B_1 \cap A_1$ é aberto e não-vazio, donde contém uma bola B_2, a qual podemos escolher tão pequena que seu raio não exceda 1/2 e seu fecho esteja contido em $B_1 \cap A_1$. Por sua vez, A_2 sendo aberto e denso, $B_2 \cap A_2$ é aberto e não-vazio. Logo, podemos obter uma bola aberta B_3, de raio inferior a 1/3, tal que $\overline{B}_3 \subset B_2 \cap A_2$. Prosseguindo anàlogamente, obtemos uma seqüência $\overline{B}_1 \supset \overline{B}_2 \supset \ldots \supset \overline{B}_n \supset \ldots$ com $\overline{B}_{n+1} \subset B_n \cap A_n$ e $\delta(\overline{B}_n) \to 0$. Para cada n, escolhamos um ponto $x_n \in \overline{B}_n$. A seqüência (x_n) assim obtida é de Cauchy (vide Prop. 1). Como M é completo, existe $x = \lim x_n \in M$. Afirmamos que $x \in \overline{B}_n$ para todo n. Com efeito, dado $p \in N$ arbitrário, temos $x_n \in \overline{B}_p$ para todo $n > p$. Como $\overline{B}_p$ é fechado, segue-se que $x = \lim x_n \in \overline{B}_p$, seja qual fôr $p \in N$. Em virtude da relação $\overline{B}_{n+1} \subset B_n \cap A_n$, vemos que $x \in B_1$ e que $x \in A_n$ para todo n, isto é, $x \in B_1 \cap S$, como devíamos demonstrar.

Observação — Ser um espaço de Baire é uma propriedade topológica, logo, a proposição acima significa que todo espaço topológico homeomorfo a um espaço métrico completo é um espaço de Baire.

EXEMPLOS

23. Resulta do Teorema de Baire que todo espaço métrico completo M contendo apenas uma quantidade enumerável de pontos deve possuir um ponto isolado. Do contrário M seria magro em si mesmo (Ex. 19) e, pelo Teorema de Baire, int.$(M) = \varnothing$, o que é absurdo. Na realidade, M deve possuir uma infinidade de pontos isolados pois se $x_1 \in M$ é isolado, $M - \{x_1\}$ é fechado em M e portanto é um espaço métrico enumerável. Logo, existe um ponto isolado $x_2 \in M - \{x_1\}$, e assim por diante. Em particular, todo subconjunto fechado enumerável do espaço euclidiano R^n possui uma infinidade de pontos isolados. (Para uma informação mais precisa, vide Ex. 26.) Ainda em conseqüência, a topologia natural do conjunto Q dos números racionais não pode ser definida por uma métrica em relação à qual Q seja completo. O Teorema de Baire proporciona também uma demonstração de que o conjunto dos números reais não é enumerável, por ser um espaço métrico completo sem pontos isolados.

24. O conjunto de Cantor K (vide Ex. 21) é um subespaço fechado da reta, logo, é um espaço métrico completo e portanto um espaço de Baire. Mostraremos agora que K não possui pontos isolados e, em conseqüência, concluiremos que K não é enumerável. Inicialmente observamos que se, numa das etapas da construção de K, o intervalo (a, b) é um dos terços médios omitidos, os seus extremos a, b nunca mais serão omitidos e portanto pertencem a K. Com efeito, em qualquer etapa sòmente são retirados pontos interiores dos intervalos que sobraram da etapa anterior. Consideremos, por exemplo, o extremo a de um têrço médio omitido (a, b). Embora exista um intervalo semi-aberto $[a, b)$ tal que $[a, b) \cap K = \{a\}$, qualquer intervalo $(a - \epsilon, a]$ contém infinitos pontos de K. Com efeito, na ocasião em que (a, b) foi omitido, restou um certo intervalo $[c, a]$. Nas etapas posteriores da construção de K, restarão sempre terços finais de intervalo, do tipo $[c_n, a]$, com $c_n \in K$, como observamos acima. O comprimento $c_n - a$ tende para 0, logo, $c_n \to a$ e assim a não é ponto isolado de K. Suponhamos, em seguida, que $x \in K$ não seja extremo de um intervalo omitido durante a construção de K. (Não sabemos, a esta altura, se tais pontos existem realmente em K. Entretanto, como foi omitida apenas uma infinidade enumerável de intervalos, os pontos extremos de intervalos omitidos formam um subconjunto enumerável de K. Resultará então desta discussão que os demais pontos, não sòmente existem, como formam um conjunto não enumerável, e mesmo um espaço de Baire.) Afirmamos que, dado qualquer $\epsilon > 0$, existem pontos de K em ambos os intervalos $(x - \epsilon, x)$ e $(x, x + \epsilon)$. Tomemos $(x, x + \epsilon)$, por exemplo. Se $(x, x + \epsilon) \cap K$ fôsse vazio, então o intervalo $(x, x + \epsilon)$ teria sido omitido durante a construção de K. Na primeira vez em que uma parte de $(x, x + \epsilon)$ fôsse omitida, nada mais restaria dêsse intervalo pois os extremos do intervalo omitido pertenceriam a K e portanto não seriam omitidos em etapas posteriores. Como x permaneceu, segue-se que o intervalo omitido foi do tipo (x, b). Mas isto contradiz a hipótese feita sôbre x e portanto a discussão está encerrada.

25. O conjunto dos números irracionais é um espaço de Baire, em virtude da Prop. 13, pois é o complementar do conjunto magro Q na reta. Por outro lado, não pode existir uma seqüência de abertos $A_n \subset R$ tais que $\bigcap A_n = Q$ (isto é, Q não é um conjunto do tipo G_δ) pois tais A_n seriam necessàriamente densos em R e Q seria um espaço de Baire, ainda devido à Prop. 13.

26. Segue-se imediatamente da definição que se X é um espaço de Baire e $X = \bigcup F_n$ onde cada F_n é fechado em X, então pelo menos um dos F_n contém um aberto não-vazio. [Isto é, int.$(F_n) \neq \emptyset$ para algum n.] A Prop. 11 nos permite afirmar, mais exatamente, que se $X = \bigcup F_n$ onde

cada F_n é fechado então $A = \bigcup \text{int.}(F_n)$ é um aberto denso em X. Com efeito, seja U um aberto não-vazio qualquer em X. Temos $U = \bigcup (U \cap F_n)$ onde cada $U \cap F_n$ é fechado em U. Sendo U um espaço de Baire, existirá algum n tal que $\text{int.}(U \cap F_n) = U \cap \text{int.}(F_n) \neq \varnothing$. Isto mostra que $U \cap (\bigcup \text{int.}(F_n)) \neq \varnothing$, donde $\bigcup \text{int.}(F_n)$ é denso em X. Completando o Ex. 23, podemos então acrescentar que todo espaço de Baire enumerável possui um subconjunto discreto denso.

O Teorema de Baire possui numerosas e importantes aplicações em Análise e em Topologia. Aqui nos limitaremos à proposição seguinte. Para interessantes aplicações do Teorema de Baire à Teoria das funções reais, vide R. P. Boas, "A Primer of Real Functions" (Carus Monographs).

Proposição 15 — *Dados os espaços métricos M e N, sendo M completo, e uma seqüência de aplicações contínuas $f_n : M \to N$, convergindo simplesmente para uma aplicação $f : M \to N$, o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é magro em M.*

Demonstração: Para k, p inteiros arbitrários, ponhamos:

$$F_{kp} = \{x \in M;\, d(f_m(x), f_n(x)) \leq 1/k, \text{ quaisquer que sejam } m, n \geq p\}.$$

Fazendo $m \to \infty$, vemos que $x \in F_{kp}$ implica $d(f(x), f_n(x)) \leq 1/k$, para todo $n > p$. Como as f_n são contínuas, todos os conjuntos F_{kp} são fechados em M. Além disso, para todo k inteiro, tem-se $M = \bigcup_p F_{kp}$. Com efeito, para $x \in M$ qualquer, $f_n(x) \to f(x)$, logo, $(f_n(x))$ é uma seqüência de Cauchy em N e portanto existe p tal que $m, n > p$ implica $d(f_m(x), f_n(x)) \leq 1/k$. Mas isto significa que $x \in F_{kp}$, o que comprova a afirmação feita. Em virtude do Ex. 26, segue-se que, pondo $A_k = \bigcup_p \text{int.}(F_{kp})$, os conjuntos A_k são abertos e densos em M. Seja $S = \bigcap A_k$. A proposição ficará demonstrada se provarmos que $f : M \to N$ é contínua em todo ponto $x_0 \in S$. Para isto, seja $\epsilon > 0$ dado. Tomemos k inteiro tal que $3/k < \epsilon$. Como $x_0 \in A_k$, existe p tal que $x_0 \in \text{int.}(F_{kp})$. Seja $\delta > 0$ tal que $d(x, x_0) < \delta$ implica $x \in F_{kp}$ e $d(f_p(x), f_p(x_0)) < 1/k$. Então, $d(x, x_0) < \delta$ implica $d(f(x), f(x_0)) \leq$ $\leq d(f(x), f_p(x)) + d(f_p(x), f_p(x_0)) + d(f_p(x_0), f(x_0)) < 1/k + 1/k + 1/k < \epsilon$, donde se conclui a continuidade de f no ponto x_0.

§ 7. O Método das Aproximações Sucessivas

Suponhamos que se deseja resolver uma equação do tipo $f(x) = b$, onde f é contínua. O método das aproximações sucessivas opera da maneira seguinte. Em primeiro lugar, introduz-se a nova função $\varphi(x) = f(x) +$ $+ x - b$, fazendo assim com que a equação original seja equivalente a

$\varphi(x) = x$. Para obter uma solução desta nova equação, toma-se um valor arbitrário x_0 e põe-se, sucessivamente, $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1) \ldots$ Se a seqüência (x_n) convergir, então $x = \lim x_n$ será uma solução de $\varphi(x) = x$ pois $\varphi(x) = \varphi(\lim x_n) = \lim \varphi(x_n) = \lim x_{n+1} = \lim x_n = x$. Em conseqüência, $x = \lim x_n$ será uma solução da equação $f(x) = b$.

A discussão acima foi deliberadamente vaga, não deixando explícito o domínio nem o contradomínio de f. Para substituir a equação $f(x) = b$ por $\varphi(x) = x$ é necessário saber somar e subtrair elementos nesses conjuntos e, além disso, que x e $f(x)$ pertençam ao mesmo espaço. Passamos agora a um tratamento sistemático, baseado no "Teorema do ponto fixo para contrações", devido a S. Banach (Prop. 16).

Lembramos que $f : M \to N$ chama-se uma *contração* quando M, N são espaços métricos e existe um número real k, $0 < k < 1$, tal que $d(f(x), f(y)) \leq$ $\leq k \cdot d(x, y)$ quaisquer que sejam $x, y \in M$.

Tôda contração é uma aplicação uniformemente contínua.

Dada uma aplicação $f : M \to M$, de M em si mesmo, um ponto $x \in M$ chama-se um *ponto fixo* de f quando $f(x) = x$.

Por exemplo, todo ponto $x \in M$ é fixo relativamente à aplicação identidade. No espaço R^n, 0 é o único ponto fixo da aplicação $x \to -x$. Se $a \neq 0$, a aplicação $x \to x + a$, de R^n em si mesmo, não possui pontos fixos.

Dada $f : M \to M$, escreveremos $f^2(x) = f(f(x)), f^3(x) = f(f^2(x))$ etc.

PROPOSIÇÃO 16 — *Tôda contração $f : M \to M$, de um espaço métrico completo M, possui um único ponto fixo. Dado qualquer ponto $x_0 \in M$, a seqüência $f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^n(x_0), \ldots$ converge para o ponto fixo de f.*

Demonstração: Tomado arbitràriamente $x_0 \in M$, ponhamos $x_n = f^n(x_0)$.

Mostraremos que (x_n) é uma seqüência de Cauchy. De fato, tem-se $d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$ e daí $d(x_n, x_{n+1}) = d(f^n(x_0), f^n(x_1)) \leq k^n \, d(x_0, x_1)$. Por conseguinte:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \ldots + d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq \\ &\leq (k^n + \ldots + k^{n+p-1}) \cdot d(x_0, x_1) = \\ &= k^n(1 + k + \ldots + k^{p-1}) \cdot d(x_0, x_1) < \\ &< \frac{k^n}{1-k} \cdot d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Quando $n \to \infty$, k^n tende para zero e portanto o diâmetro do conjunto $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ tende para zero. Pela Prop. 1, (x_n) é uma seqüência de Cauchy. Como M é completo, existe $x = \lim x_n$, $x \in M$. Tem-se $f(x) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = x$, isto é, x é um ponto fixo de f. Resta provar que é o único. Ora, se $f(x) = x$ e $f(y) = y$ então, $d(x, y) =$

$= d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$ e daí $(k-1)d(x, y) \geq 0$. Como $k - 1 < 0$ segue-se que $d(x, y) = 0$, ou seja, $x = y$.

Observação — Fazendo $p \to \infty$ na desigualdade $d(x_n, x_{n+p}) < [k^n/(1-k)] \cdot d(x_0, x_1)$, obtemos $d(x_n, x) \leq [k^n/(1-k)] \cdot d(x_0, x_1)$, o que fornece um limite superior do êrro cometido ao se tomar a n-ésima aproximação x_n em lugar da solução exata x. Esta observação tem interêsse em Cálculo Numérico.

EXEMPLO

27. Seja f uma função real de variável real que possui em todos os pontos $x \in R$ uma derivada $f'(x)$ satisfazendo à condição $|f'(x)| \leq k < 1$, onde k é uma constante. Então, o gráfico de f corta a diagonal $y = x$ exatamente num ponto $(x, x) = \lim (x_n, x_n)$ onde $x_n = f^n(x_0)$ e $x_0 \in R$ é tomado arbitràriamente. Com efeito, pelo Teorema do Valor Médio (Cálculo), $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, logo, $f: R \to R$ é uma contração. Sendo R completo, a Prop. 16 se aplica.

Proposição 17 — *Seja A um subconjunto aberto do espaço euclidiano R^n. Seja $f: A \to R^n$ uma aplicação da forma $f(x) = x + \varphi(x)$, onde $\varphi: A \to R^n$ é uma contração. Então, f é um homeomorfismo de A sôbre um subconjunto aberto de R^n.*

Demonstração: Evidentemente, f é uma aplicação contínua de A sôbre $f(A)$. Além disso, dados $x, y \in A$, tem-se $x - y = f(x) - f(y) + \varphi(x) - \varphi(y)$ e portanto $|x - y| \leq |f(x) - f(y)| + |\varphi(y) - \varphi(x)| \leq |f(x) - f(y)| + k|x - y|$. Segue-se que $|f(x) - f(y)| \geq (1 - k)|x - y|$. Isto mostra que f é biunívoca e que a aplicação inversa $f^{-1}: f(A) \to A$ satisfaz à condição de Lipschitz $|f^{-1}(z) - f^{-1}(w)| \leq (1-k)^{-1}|z - w|$, donde f^{-1} é (uniformemente) contínua. Conclui-se pois que f é um homeomorfismo de A sôbre $f(A)$. Resta apenas mostrar que $f(A)$ é aberto em R^n. Seja então $b = f(a) \in f(A)$. Como A é aberto, existe $r > 0$ tal que a bola fechada $D = D(a; r)$, de centro a e raio r, está contida em A. Afirmamos que $|y - b| < (1 - k)r$ implica $y \in f(A)$ e isto mostrará que $f(A)$ é aberto. Devemos então achar uma solução $x \in A$, para a equação $f(x) = y$, sabendo que $d(y, f(a)) < (1 - k)r$. Isto equivale a obter um ponto fixo $x \in A$ para a contração $\xi_y: A \to R^n$, definida por $\xi_y(x) = y - \varphi(x)$. Como a bola fechada $D = D(a; r)$ é um espaço métrico completo, basta demonstrar que $\xi_y(D) \subset D$. A contração $\xi_y|D: D \to D$ terá um ponto fixo, pela Prop. 16. Seja então $x \in D$, isto é, $|x - a| \leq r$. Devemos provar que $|\xi_y(x) - a| \leq r$.

Ora, lembrando que $b = a + \varphi(a)$, temos:

$$|\xi_y(x) - a| = |y - \varphi(x) - a| \leq |y - \varphi(a) - a| + |\varphi(x) - \varphi(a)| \leq |y - b| + k|x - a| \leq (1 - k)r + kr = r$$

como queríamos demonstrar.

Observações — 1) A aplicação f da Prop. 17 é, na realidade, um homeomorfismo uniforme de A sôbre $f(A)$.

2) A demonstração mostra que se a bola fechada $D(a; r)$ está contida em A então a bola $B(f(a); (1 - k)r)$ está contida em $f(A)$. Em particular, se $A = R^n$, $f(A) = R^n$ e portanto f será um homeomorfismo uniforme de R^n sôbre si mesmo.

3) A demonstração dada mostra que a Prop. 17 e as duas observações anteriores continuam válidas se, em vez do espaço euclidiano R^n, tivermos um espaço de Banach E arbitrário (isto é, um espaço vetorial normado completo E).

EXEMPLOS

28. Seja $\varphi : R \to R$ uma função que possui, em todos os pontos $x \in R$, uma derivada satisfazendo à condição $|\varphi'(x)| \leq k$, onde k é uma constante, $0 < k < 1$. Então a função $f : R \to R$, definida por $f(x) = x + \varphi(x)$, é um homeomorfismo de R sôbre R. Anàlogamente, dada $\varphi : R^n \to R^n$, se tôdas as derivadas parciais $\partial\varphi^i/\partial x^j$ são uniformemente limitadas por uma constante k, $0 < k < 1/n$ em R^n, (onde $\varphi(x) = (\varphi^1(x), \ldots, \varphi^n(x))$), então $f : R^n \to R^n$, definida por. $f(x) = x + \varphi(x)$, é um homeomorfismo de R^n sôbre si mesmo. Com efeito, o teorema do valor médio dá $|\varphi(x + h) - \varphi(x)| \leq n|h| \cdot \text{máx.}\{|\partial\varphi^i(x)/\partial x^j|; i, j = 1, 2, \ldots, n\}$ ou seja $|\varphi(x + h) - \varphi(x)| \leq k \cdot |h|$ e portanto φ é uma contração. (Observação: Para obter o teorema do valor médio sob está forma, deve-se tomar em R^n a norma $|x| = \text{máx.}\{|x^1|, \ldots, |x^n|\}$.)

29. Seja E um espaço de Banach. O conjunto $\mathfrak{L}(E)$ de tôdas as aplicações lineares contínuas $f : E \to E$ é evidentemente um espaço vetorial relativamente às operações naturais $f + g$ e λf. Introduz-se uma norma em $\mathfrak{L}(E)$ pondo $|f| = \inf.\{m \in R; |f(x)| \leq m|x| \text{ para todo } x \in E\}$. Isto é equivalente a pôr $|f| = \sup.\{|f(x)|; |x| = 1\}$. Indiquemos com $e : E \to E$ a aplicação identidade. A Prop. 17 mostra que, dada $f \in \mathfrak{L}(E)$, com $|f| < 1$, $e + f$ é um homeomorfismo de E sôbre E e portanto uma aplicação linear invertível. Isto mostra que a bola aberta de raio 1 e centro e em $\mathfrak{L}(E)$ consiste inteiramente de aplicações lineares invertíveis. Em particular, se $T = (a_j^i)$ é uma matriz real $n \times n$ tal que todos os elementos da matriz $T - I$ (onde I é a matriz identidade $n \times n$) são, em valor absoluto, infe-

riores a $1/n$, então o sistema de equações lineares

$$\begin{array}{l} a_1^1x^1 + a_2^1x^2 + \ldots + a_n^1x^n = b^1 \\ a_1^2x^1 + a_2^2x^2 + \ldots + a_n^2x^n = b^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^nx^1 + a_2^nx^2 + \ldots + a_n^nx^n = b^n \end{array}$$

tem solução única $x = (x^1, \ldots, x^n)$, sejam quais forem $b^1, \ldots, b^n$ reais. Com efeito, tomando em R^n a norma $|x| = \text{máx.}\{|x^1|, \ldots, |x^n|\}$, isto induz no espaço $\mathfrak{L}(R^n)$, das aplicações lineares de R^n em si mesmo, uma norma segundo a qual, se $T = (a_j^i)$, $|T| \leq n \cdot \text{máx.}\{|a_j^i|; i, j = 1, 2, \ldots, n\}$. Assim, a transformação linear, dada pela matriz T, escreve-se $T = I + (T - I)$ com $|T - I| < 1$ e portanto T é um homeomorfismo de R^n sôbre si mesmo, o que significa que a equação $T(x) = b$ tem sempre solução única x, seja qual fôr $b = (b^1, \ldots, b^n) \in R^n$.

O método das aproximações sucessivas tem duas das suas mais importantes aplicações na demonstração do Teorema da Função Inversa (ou, equivalentemente, no Teorema das Funções Implícitas) e no Teorema de Existência e Unicidade de soluções de um sistema de equações diferenciais ordinárias. (Vide [Lang].)

§ 8. Exercícios

1. Seja M um espaço métrico. No espaço $\mathfrak{B}(N; M)$ das seqüências limitadas em M, o subconjunto C das seqüências de Cauchy é fechado. Segue-se que, se M fôr completo, o conjunto das seqüências convergentes é fechado em $\mathfrak{B}(N; M)$. Se E fôr um espaço vetorial normado, o conjunto das seqüências de Cauchy é um subespaço vetorial de $\mathfrak{B}(N; E)$.

2. Seja Σa_n uma série convergente de números reais positivos. Dada uma seqüência (x_n) num espaço métrico M, se $d(x_n, x_{n+1}) \leq a_n$ para todo $n \in N$ então (x_n) é uma seqüência de Cauchy.

3. Introduzir no espaço R^n uma métrica limitada, completa, induzindo em cada bola de raio 1 a métrica usual.

4. Provar as seguintes afirmações:

a) $\text{fr.}(S) = X \Rightarrow S$ denso em X.

b) S, T densos em $X \Rightarrow S \cup T$ denso em X mas não implica $S \cap T$ denso em X

c) S denso em X, T denso em $Y \Rightarrow S \times T$ denso em $X \times Y$.

d) S denso em X, A aberto em $X \Rightarrow S \cap A$ denso em A.

e) S denso em X, $S \subset T \subset X \Rightarrow S$ denso em T e T denso em X.

f) Se int. S, ou $\overline{S}$, ou fr.(S) é denso em X então S é denso em X.

g) S denso em X, S conexo $\Rightarrow X$ conexo.

h) Seja X um espaço *E1*. Um subconjunto $S \subset X$ é denso em X se, e sòmente se, todo ponto $x \in X$ é limite de uma seqüência de pontos de S.

i) $X - \{x\}$ é denso em $X \Leftrightarrow x$ não é isolado em X.

j) No espaço X do Exerc. 15 do Cap. III, o subespaço $X - \{\Omega\}$ é denso em X mas Ω não é limite de uma seqüência de pontos de $X - \{\Omega\}$;

k) O conjunto dos números racionais da forma $m/2^n$, $m, n \in Z$, (*números diádicos*) é denso na reta.

5. Sejam $D^n = \{x \in R^n; |x| \leq 1\}$ e $S^{n-1} = \{x \in R^n; |x| = 1\}$. As seguintes afirmações são equivalentes: *a*) Tôda aplicação contínua $f: D \to D$ possui um ponto fixo. *b*) Não existe uma retração $r: D^n \to S^{n-1}$ [isto é, uma aplicação contínua tal que $r(x) = x$ para todo $x \in S^{n-1}$]. Para verificar que *b*) $\Rightarrow$ *a*), suponha que $f: D^n \to D^n$ é contínua, com $f(x) \neq x$ para todo $x \in D^n$, e defina $r: D^n \to S^{n-1}$ pondo $r(x)$ = interseção da semi-reta $\overrightarrow{f(x)x}$ com a esfera S^{n-1}. A veracidade de *a*) constitui o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. (Vide Hurewicz e Walman, "Dimension Theory", Pág. 40.)

6. No espaço de Hilbert H, das seqüências de quadrado somável, consideremos a bola unitária $D = \{x \in H; |x| \leq 1\}$. A aplicação $f: D \to D$, definida por $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots) = (\sqrt{1 - |x|^2}, x_1, x_2, \ldots)$ é contínua e não possui pontos fixos. Concluir a existência de uma retração $r: D \to S$, onde $S = \{x \in H; |x| = 1\}$.

7. Sejam S denso no espaço topológico X, e Y um espaço de Hausdorff. Uma aplicação contínua $f: S \to Y$ possui no máximo uma extensão contínua $\bar{f}: X \to Y$. A hipótese sôbre Y é indispensável.

8. Dado $S \subset X$, uma retração $r: X \to S$ é simplesmente uma extensão contínua da aplicação identidade $i: S \to S$. Obtenha extensões contínuas $r: X \to S$ da aplicação identidade $i: S \to S$ nos seguintes casos: *a*) $X = R^n - \{0\}$, $S = S^{n-1}$; *b*) $X = I \times I$, $S = (\{0\} \times I) \cup (I \times \{0\}) \cup (\{1\} \times I)$.

9. Sejam H o espaço de Hilbert das seqüências de quadrado somável. O subconjunto H_0 formado pelas seqüências $x = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$ com apenas um número finito de coordenadas não nulas é um subespaço vetorial. Os vetores $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots)$, $e_3 = (0, 0, 1, \ldots)$ etc. formam uma base de H_0. O subespaço H_0 é denso em H. Tôda aplicação linear contínua $f: H_0 \to E$, de H_0 num espaço vetorial normado completo ("Espaço de Banach") E estende-se de modo único a uma aplicação linear contínua $\bar{f}: H \to E$.

10. Com a notação do exercício anterior, a função $f: H_0 \to R$, definida por $f(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) = x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n$, é linear e descontínua. De acôrdo com a Álgebra Linear, é possível estender f linearmente a todo o espaço H (de várias maneiras distintas) e obter assim funcionais lineares descontínuos $\bar{f}: H \to R$.

11. Para cada $n \in N$ construa uma função real contínua $\varphi_n: R \to R$ tal que $\varphi_n(t) = 1$ para algum ponto $t \in R$ e $\varphi_n(t) = 0$ exceto se $1/(n+1) \leq t \leq 1/n$. Defina $f: [0, 1] \to H$ (notação do Exerc. 9) pondo $f(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots)$. Mostre que f é descontínua no ponto 0, embora cada uma das suas coordenadas seja contínua.

12. Um espaço métrico M é completo se, e sòmente se, para tôda imersão isométrica $f: M \to N$, $f(M)$ é fechado em N.

13. Sejam M, N espaços métricos e $f: M \to N$ uma *dilatação*, isto é, existe uma constante $k \geq 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \geq k \cdot d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$. Se f fôr contínua e M fôr completo, então f é uma aplicação fechada.

14. Não existe uma função real $f: [0, 1] \to R$ cujos pontos de continuidade sejam precisamente os números racionais do intervalo $[0, 1]$.

15. Dados $a < b$, existe alguma função contínua $f: [a, b] \to R$ que assume valôres racionais para todo $x \in [a, b]$ irracional e, para todo $x \in [a, b]$ racional, $f(x)$ é irracional?

16. Dados quaisquer pontos x, y no conjunto de Cantor K, existe um homeomorfismo $h: K \to K$ tal que $h(x) = y$.

17. Seja X um espaço de Baire regular, conexo e localmente conexo. X não pode ser escrito como reunião enumerável $X = \bigcup F_n$ de subconjuntos fechados F_n, dois a dois disjuntos, exceto no caso trivial em que um dos F_n é igual a F e os demais são vazios.

18. Sejam $U \subset R^n$ um conjunto aberto e $f: U \to R^n$ uma aplicação da forma $f(x) = T \cdot x + \varphi(x)$, onde $T: R^n \to R^n$ é uma aplicação linear invertível e $\varphi: U \to R^n$ é tal que $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq k|x - y|$, onde $k \leq 1/|T^{-1}|$. Então, f é um homeomorfismo de U sôbre um aberto do R^n. (Êste resultado é a parte crucial do Teorema da Função Inversa.)

19. Seja M um espaço métrico completo e $f: M \to M$ uma aplicação tal que $f^p = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (p vêzes) é uma contração. Então, f tem um único ponto fixo.

20. Sejam M um espaço métrico completo, T um espaço topológico e $(f_t)_{t \in T}$ uma família de aplicações $f_t: M \to M$. Suponhamos que f_t dependa continuamente do parâmetro t no sentido fraco seguinte: para cada $x \in M$ a aplicação $t \to f_t(x)$, de T em M, é contínua. Suponhamos ainda que cada f_t é uma contração com $d(f_t(x), f_t(y)) \leq kd(x, y)$, onde $0 < k < 1$, k independente de t. Nestas condições, cada f_t possui um único ponto fixo a_t. A aplicação $\varphi: T \to M$ definida por $\varphi(t) = a_t$, é contínua.

21. Sejam E, F espaços vetoriais normados e $\mathfrak{L}(E; F)$ o conjunto das aplicações lineares contínuas de E em F. $\mathfrak{L}(E; F)$ é um espaço vetorial, no qual consideraremos a norma $|f| = \sup.\{|f(x)|; |x| = 1, x \in E\} = \inf.\{k > 0; |f \cdot x| \leq k|x|,$ para todo $x \in E\}$. Uma seqüência de aplicações lineares contínuas $f_n: E \to F$ converge para $f \in \mathfrak{L}(E; F)$ segundo esta norma se, e sòmente se, $f_n \to f$ uniformemente em cada parte limitada de E. Se F fôr completo, então $\mathfrak{L}(E; F)$ é completo.

22. Veja no livro "A Primer of Real Functions", por R. Boas, ("Carus Mathematics Monographs") exemplos de conjunto magro que não é de medida nula e conjunto de medida nula que não é magro. Observe que todo conjunto que é reunião enumerável de fechados de medida nula é magro.

23. A fim de que um espaço métrico M seja completo, é necessário e suficiente que tôda seqüência decrescente $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$ de subconjuntos fechados não-vazios de M, tais que $\delta(F_n) \to 0$, tenha interseção $\bigcap F_n$ igual a um ponto de M. Na reta, a seqüência de conjuntos fechados $F_n = [n, \infty)$ é decrescente, mas $\bigcap F_n = \emptyset$ porque não se tem $\delta(F_n) \to 0$.

24. Seja H o espaço de Hilbert das seqüências de quadrado somável. A aplicação linear $T: H \to H$, com $T(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, x_2/2, \ldots, x_n/n, \ldots)$ é contínua e biunívoca, mas não é sôbre H.

25. Sejam X um espaço topológico, M um espaço métrico completo, A um subconjunto de X, $f: A \to M$ uma aplicação e $a \in \overline{A}$. Para que exista o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ é necessário e suficiente que, para cada $\epsilon > 0$ exista uma vizinhança V de a tal que $x, y \in V$ implica $d(f(x), f(y)) < \epsilon$. ("Critério de Cauchy".)

26. *Integral de Riemann.* Seja $\mathfrak{B}$ o espaço das funções limitadas $f: [a, b] \to R$, com a métrica da convergência uniforme. Uma função $f \in \mathfrak{B}$ diz-se *simples* quando existem números t_i, com $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ tais que f é constante em cada intervalo $[t_i, t_{i+1})$. Seja $\mathfrak{S}$ o subespaço vetorial de $\mathfrak{B}$ formado pelas funções simples. Define-se uma função linear $I: \mathfrak{S} \to R$ pondo $I(f) = \Sigma c_i(t_{i+1} - t_i)$ se f fôr constante no intervalo $[t_i, t_{i+1})$. Observe que $|I(f)| \leq |f|\ (b - a)$, de modo que I é uniformemente contínua. Concluir a existência de uma única função linear contínua $J: \overline{\mathfrak{S}} \to R$ que estende I. Escreve-se $J(f) = \int_a^b f(x)dx$. Mostre que se $f: [a, b] \to R$ fôr uniformemente contínua, então $f \in \overline{\mathfrak{S}}$. (Resultará da Prop. 15 do Cap. VII que tôda função contínua $: [a, b] \to R$ pertence a $\overline{\mathfrak{S}}$. Vide também o Exerc. 25 do Cap. VII.)

Espaços Compactos

Capítulo VII

§1. Introdução

A proposição seguinte desempenha um papel fundamental no desenvolvimento da Análise Clássica.

TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS — *Todo conjunto infinito e limitado de números reais possui um ponto de acumulação.*

Demonstração: Seja $X \subset R$ um conjunto infinito e limitado. Definamos $Y = \{y \in R;$ existem infinitos pontos de X à direita de $y\}$. Y é não-vazio e limitado superiormente. Na realidade, se $y \in Y$ e $y' < y$ então $y' \in Y$, donde Y é um intervalo, da forma $Y = (-\infty, a)$ ou da forma $Y = (-\infty, a]$, onde $a = \sup. Y$. Seja qual fôr o caso, afirmamos que a é um ponto de acumulação de X. Com efeito, dado $\epsilon > 0$ arbitràriamente, $a - \epsilon \in Y$, logo, existem infinitos pontos $x \in X$ com $a - \epsilon < x$. Por outro lado, $a + \epsilon \notin Y$, donde existe apenas um número finito de pontos $x \in X$ com $a + \epsilon < x$. Segue-se que o intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ contém infinitos pontos de X, como queríamos demonstrar.

O Teorema de Bolzano-Weierstrass pode ser equivalentemente formulado assim: se M é um conjunto limitado e fechado da reta, então, no espaço métrico M, todo conjunto infinito possui um ponto de acumulação.

Outra proposição básica, de crucial importância em Análise, é o

TEOREMA DE BOREL-LEBESGUE — *Seja $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de intervalos abertos I_λ tal que todo ponto do intervalo fechado $[a, b]$ pertence a um dos I_λ, isto é, $[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in L} I_\lambda$. Nestas condições, é possível escolher um número finito de intervalos I_λ de tal forma que $[a, b] \subset I_{\lambda_1} \cup \ldots \cup I_{\lambda_n}$.*

Demonstração: Seja X o conjunto dos pontos $x \in [a, b]$ tais que o intervalo $[a, x]$ pode ser coberto por uma reunião finita dos I_λ, isto é, $[a, x] \subset I_{\lambda_1} \cup \ldots \cup I_{\lambda_k}$. Evidentemente, $a \in X$ e, dado $x \in X$, $a < x' < x$ implica $x' \in X$, logo, X é um intervalo, da forma $[a, c]$ ou da forma $[a, c]$, onde $c = \sup. X$. Afirmamos que $c \in X$, donde $X = [a, c]$. Com efeito, c pertence a um certo intervalo I_{λ_0}. Escolhamos arbitràriamente um ponto $x \in I_{\lambda_0}$, com $a \leq x < c$. Tem-se $x \in X$ e portanto $[a, x] \subset I_{\lambda_1} \cup \ldots \cup I_{\lambda_k}$. Segue-se que $[a, c] \subset I_{\lambda_1} \cup \ldots \cup I_{\lambda_k} \cup I_{\lambda_0}$, donde $c \in X$. Se fôsse $c < b$, existiria $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno para que $c + \epsilon < b$ e $[c, c + \epsilon] \subset I_{\lambda_0}$. Então seria $[a, c + \epsilon] \subset I_{\lambda_1} \cup \ldots \cup I_{\lambda_1} \cup \cup I_{\lambda_0}$ e portanto $c + \epsilon \in X$, uma contradição. Logo, $c = b$ e $X = [a, b]$, o que demonstra o teorema.

O Teorema de Borel-Lebesgue, enunciado acima em sua forma original, continua válido se, em vez de uma família de intervalos, tomarmos uma família $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos abertos da reta, com $[a, b] \subset \bigcup U_\lambda$. Com efeito, cada ponto $x \in [a, b]$ pertence a um aberto U_λ, donde podemos obter um intervalo aberto I_x tal que $x \in I_x \subset U_\lambda$. Da família $(I_x)_{x \in [a, b]}$ extraímos uma coleção finita tal que $[a, b] \subset I_{x_1} \cup \ldots \cup I_{x_n}$, de acôrdo com o Teorema. Mas, para cada I_{x_j}, existe um U_{λ_j} com $I_{x_j} \subset U_{\lambda_j}$, $j = 1, \ldots, n$. Segue-se que $[a, b] \subset U_{\lambda_1} \cup \ldots \cup U_{\lambda_n}$, como queríamos demonstrar.

Outra maneira equivalente de enunciar o Teorema de Borel-Lebesgue é a seguinte:

Seja M um subconjunto limitado e fechado da reta. Seja $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de subconjuntos abertos da reta tais que $M \subset \bigcup U_\lambda$. É possível escolher um número finito dos U_λ de forma que $M \subset U_{\lambda_1} \cup \ldots \cup U_{\lambda_n}$.

Com efeito, sendo M limitado, existe um intervalo $[a, b]$ contendo M. E sendo M fechado, $U = R - M$ é aberto. Os abertos U_λ, $\lambda \in L$, juntamente com U, são tais que $[a, b] \subset (\bigcup U_\lambda) \cup U$. Existe, portanto, uma coleção finita com $[a, b] \subset U_{\lambda_1} \cup \ldots \cup U_{\lambda_n} \cup U$. Mas nenhum ponto de M está contido em U. Logo, $M \subset U_{\lambda_1} \cup \ldots \cup U_{\lambda_n}$, como queríamos demonstrar.

Estudaremos neste capítulo os espaços métricos M nos quais é válida a *propriedade de Bolzano-Weierstrass*: todo conjunto infinito em M possui um ponto de acumulação. Mostraremos que tal propriedade é equivalente à de *Borel-Lebesgue*: de tôda família cuja reunião é M pode extrair-se uma subfamília finita cuja reunião é ainda M.

Para espaços topológicos não metrizáveis, a equivalência entre as propriedades de Bolzano-Weierstrass e Borel-Lebesgue não se mantém. A segunda implica a primeira, mas não vice-versa. A experiência mostrou

que a propriedade de Borel-Lebesgue é a mais útil das duas, no caso geral. Por isso a escolheremos para definir espaços compactos.

Algumas das propriedades básicas dos espaços métricos compactos são válidas para espaços compactos quaisquer, sem que a demonstração no caso geral seja mais trabalhosa. No parágrafo seguinte, estabeleceremos essas propriedades gerais dos espaços compactos. Por outro lado, existem propriedades especiais dos espaços metrizáveis que não valem ou não fazem sentido, no caso geral. Estas serão destacadas em alguns dos parágrafos posteriores.

§ 2. Propriedades Gerais dos Espaços Compactos

Sejam X um espaço topológico e S um subconjunto de X. Uma *cobertura* de S é uma família $\mathfrak{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de X com $S \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$, isto é, para cada $s \in S$ existe um índice $\lambda \in L$ tal que $s \in C_\lambda$.

Equivalentemente, pode-se considerar uma cobertura de S como uma coleção $\mathfrak{C}$ de subconjuntos de X (sem índices) tal que, para cada $s \in S$ existe um conjunto C da coleção $\mathfrak{C}$ com $s \in C$.

Diz-se que uma cobertura $\mathfrak{C}$ é aberta, fechada etc. quando os conjuntos C_λ que a compõem, são abertos, fechados etc. Do mesmo modo, diz-se que $\mathfrak{C}$ é uma cobertura finita, ou enumerável, ou não-enumerável quando o conjunto L dos índices λ é finito, ou enumerável, ou não-enumerável.

Seja $\mathfrak{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura de S. Uma subcobertura de $\mathfrak{C}$ é uma subfamília $\mathfrak{C}' = (C_{\lambda'})_{\lambda' \in L'}$, $L' \subset L$, que ainda é uma cobertura de S, isto é, continua válida a propriedade $S \subset \bigcup_{\lambda' \in L'} C_{\lambda'}$.

EXEMPLOS

1. Seja $S^n = \{x \in R^{n+1}; |x| = 1\}$. A coleção $\mathfrak{C}$ dos subconjuntos abertos de S^n que são homeomorfos à bola aberta $B^n = \{x \in R^n; |x| < 1\}$ é uma cobertura aberta de S^n. (Vide Ex. 10, Cap. II.)

2. Para cada inteiro $n \in N$, seja $I_n = (-n + n)$ o intervalo aberto da reta, de extremos $-n$ e $+n$. A família $\mathfrak{C} = (I_n)_{n \in N}$ é uma cobertura aberta enumerável da reta R. Seja $L \subset N$ um subconjunto infinito qualquer (por exemplo, o conjunto dos números pares, ou o conjunto dos números primos). A família $\mathfrak{C}' = (I_n)_{n \in L}$ é uma subcobertura de $\mathfrak{C}$. Por outro lado, qualquer que seja o subconjunto finito $\{n_1 < n_2 < \ldots < n_k\}$ de inteiros positivos, temos $I_{n_1} \cup \ldots \cup I_{n_k} = I_{n_k}$, logo, $\mathfrak{C}'' = (I_{n_1}, \ldots, I_{n_k})$ não é uma subcobertura de $\mathfrak{C}$. Em outras palavras, $\mathfrak{C}$ não possui subcobertura finita.

3. Mais geralmente, seja E um espaço vetorial normado de dimensão >0. As bolas abertas B_n, de centro 0 e raio n, constituem uma cobertura enumerável $(B_n)_{n \in N}$ do espaço E e qualquer subfamília infinita é uma subcobertura, mas nenhuma delas possui uma subcobertura finita.

4. Para cada $x \in [0, 1]$ seja $V_x = (x - \epsilon, x + \epsilon)$, onde $\epsilon = 2{,}8 \times \times 10^{-13}$. A família $\mathfrak{C} = (V_x)_{x \in [0,1]}$ constitui uma cobertura aberta não-enumerável do intervalo fechado $[0, 1]$. Seja $x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < < x_k = 1$ uma decomposição do intervalo $[0, 1]$ em k subintervalos justapostos $[x_i, x_{i+1}]$, de igual comprimento, onde $k > 1/2\,\epsilon$. Cada um dos intervalos da decomposição tem comprimento $x_{i+1} - x_i = 1/k < 2\,\epsilon$. Segue-se que cada ponto $x \in [0, 1]$ está a uma distância $<\epsilon$ de algum dos pontos x_i $(i = 0, \ldots, k)$ e portanto $x \in V_{x_i}$. Logo, a família $\mathfrak{C}' = = (V_{x_0}, V_{x_1}, \ldots, V_{x_k})$ é uma subcobertura finita da cobertura inicial $\mathfrak{C}$. (Evidentemente já sabíamos, pelo Teorema de Borel-Lebesgue, que $\mathfrak{C}$ possui uma subcobertura finita.)

5. Seja $S = Q \cap [0, 1] = \{r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots\}$ o conjunto dos números racionais contidos no intervalo $[0, 1]$. Seja (ϵ_n) uma seqüência de números reais positivos tais que $\Sigma\epsilon_n < 1/2$. Para cada $n \in N$, ponhamos $I_n = (r_n - \epsilon_n, r_n + \epsilon_n)$. A família $\mathfrak{C} = (I_n)_{n \in N}$ é uma cobertura aberta enumerável do conjunto S. Afirmamos que $\mathfrak{C}$ não possui subcobertura finita. Com efeito, dada qualquer subfamília finita $(I_{n_1}, \ldots, I_{n_k})$, a reunião $I_{n_1} \cup \ldots \cup I_{n_k}$ cobre uma parte do intervalo $[0, 1]$ formada por um número finito de intervalos disjuntos, cuja soma dos comprimentos não excede $2\,\epsilon_{n_1} + \ldots + 2\,\epsilon_{n_k} < 2\,\Sigma\,\epsilon_n < 1$. Logo, o complementar de $I_{n_1} \cup \ldots \cup I_{n_k}$ em $[0, 1]$ deve conter algum intervalo, dentro do qual haverá certamente algum número racional. Assim, S não está contido em $I_{n_1} \cup \ldots \cup I_{n_k}$. Segue-se que $\mathfrak{C} = (I_n)_{n \in N}$ não é uma cobertura do intervalo $[0, 1]$ pois se o fôsse admitiria, pelo Teorema de Borel-Lebesgue, uma subcobertura finita, a qual, em particular, cobriria o conjunto S.

Um espaço topológico X chama-se *compacto* quando tôda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finita.

Diz-se que um subconjunto S de um espaço topológico X é um *subconjunto compacto* quando S, com a topologia induzida de X, é um espaço compacto. Isto significa que, se $(U_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família de subconjuntos de S, abertos em S, com $\cup\, U_\lambda = S$, então existe uma subfamília finita $(U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n})$ tal que $S = U_{\lambda_1} \cup \ldots \cup U_{\lambda_n}$

Para que um subconjunto S seja compacto é necessário e suficiente que tôda cobertura $S \subset \cup\, V_\lambda$ de S, por abertos V_λ do espaço X, possua uma subcobertura finita $S \subset V_{\lambda_1} \cup \ldots \cup V_{\lambda_n}$. (Isto resulta imediatamente

do fato de que todo conjunto U_λ, aberto em S, é da forma $U_\lambda = V_\lambda \cap S$ com V_λ é aberto em X.)

EXEMPLOS

6. Em virtude do Teorema de Borel-Lebesgue, todo subconjunto limitado e fechado da reta é compacto. Em particular, o conjunto de Cantor é compacto. Todo espaço topológico finito é evidentemente compacto. Um espaço discreto infinito não é compacto, porque a cobertura aberta formada por seus pontos não possui subcobertura finita. Um espaço vetorial normado E de dimensão > 0 não é compacto, pois a cobertura formada pelas bolas abertas com centro na origem não possui subcobertura finita. Também não é compacto o conjunto dos números racionais contidos no intervalo $[0, 1]$. (Vide Ex. 5.)

7. Se K e L são subconjuntos compactos de um espaço topológico X, então $K \cup L$ é compacto. Com efeito, dada uma coleção $\mathfrak{C}$ de abertos cobrindo $K \cup L$, constitui, em particular, uma cobertura de K e uma cobertura de L. Logo, existem uma coleção finita $\mathfrak{C}' \subset \mathfrak{C}$ cobrindo K e uma coleção finita $\mathfrak{C}'' \subset C$, cobrindo L. Segue-se que $\mathfrak{C}' \cup \mathfrak{C}''$ é uma cobertura finita de $K \cup L$, a qual constitui uma subcobertura de $\mathfrak{C}$. Resulta, mais geralmente, que se $K_1, \ldots, K_n$ são subconjuntos compactos de X, sua reunião $K = K_1 \cup \ldots \cup K_n$ é compacta. Evidentemente, a reunião de uma infinidade de compactos pode não ser compacta. (Quanto à interseção, vide Ex. 11.)

8. Todo subconjunto compacto K de um espaço métrico M é necessàriamente limitado. Com efeito, as bolas abertas de raio 1 e centro nos pontos de K constituem uma cobertura aberta de K, da qual se pode extrair uma cobertura finita $K \subset B(x_1; 1) \cup \ldots \cup B(x_n; 1)$. O diâmetro de K não excede, portanto, $2n$. Em particular, um espaço métrico compacto é limitado em relação a qualquer uma das métricas compatíveis com a sua topologia. (Vide Exerc. 23.)

Para que os conjuntos U_λ, $\lambda \in L$, formem uma cobertura aberta de um espaço topológico X, é necessário e suficiente que os seus complementares $F_\lambda = X - U_\lambda$ constituam uma família de fechados em X, cuja interseção $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é vazia.

Por passagem aos complementares, segue-se então que um espaço topológico X é compacto se, e sòmente se, tôda família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de subconjuntos fechados em X, cuja interseção $\bigcap F_\lambda$ é vazia, contém uma subfamília finita $(F_{\lambda_1}, \ldots, F_{\lambda_n})$ cuja interseção $F_{\lambda_1} \cap \ldots \cap F_{\lambda_n}$ é vazia.

Diz-se que uma família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ tem a *propriedade da interseção finita* quando qualquer subfamília finita $(F_{\lambda_1}, \ldots, F_{\lambda_n})$ tem interseção não-vazia $F_{\lambda_1} \cap \ldots \cap F_{\lambda_n}$.

Assim, para que um espaço topológico X seja compacto, é necessário e suficiente que a seguinte condição se cumpra:

Se uma família $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ de conjuntos fechados em X possui a propriedade da interseção finita, então a interseção $\bigcap_{\lambda \in L} F_\lambda$ é não-vazia.

EXEMPLOS

9. Seja E um espaço vetorial normado de dimensão > 0. Para cada $n \in N$, seja $F_n = E - B(0; n)$ o complementar da bola aberta de centro 0 e raio n. Tem-se $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$. Assim, se $n_1 < < n_2 < \ldots < n_k$, $F_{n_1} \cap F_{n_2} \cap \ldots \cap F_{n_k} = F_{n_k}$ e portanto a família $(F_n)_{n \in N}$ tem a propriedade da interseção finita. Note-se porém que $\bigcap F_n = \varnothing$ e, mais geralmente, qualquer subfamília infinita de (F_n) tem interseção vazia.

10. Seja Q o conjunto dos números racionais. Tomemos um número irracional α e, para cada $n \in N$, ponhamos $F_n =$ conjunto dos números racionais r tais que $\alpha - \frac{1}{n} \leq r \leq \alpha + \frac{1}{n}$. Em outras palavras $F_n = = Q \cap [\alpha - 1/n, \alpha + 1/n]$. $(F_n)_{n \in N}$ é uma família de subconjuntos fechados de Q com a propriedade de interseção finita. Mas $\bigcap F_n = \varnothing$. Logo, Q não é um espaço compacto. (Equivalentemente, os complementares $A_n = Q - F_n$ constituem uma cobertura aberta de Q a qual não possui subcobertura finita.)

PROPOSIÇÃO 1 — *Num espaço compacto, todo subconjunto infinito possui um ponto de acumulação.*

Demonstração: Seja X um espaço compacto e suponhamos, por absurdo, que um subconjunto infinito $S \subset X$ não tenha ponto de acumulação. Sendo infinito, S contém um subconjunto enumerável $F = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ o qual também não possui ponto de acumulação. Segue-se que todo subconjunto de F é fechado em X. (Cap. III, Prop. 21, Corol. 2). Para cada $n \in N$, ponhamos $F_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, obtendo assim uma família $(F_n)_{n \in N}$ de subconjuntos fechados de X, a qual tem a propriedade da interseção finita, pois se $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, $F_{n_1} \cap F_{n_2} \cap \ldots \cap F_{n_k} = F_{n_k}$. Mas, evidentemente, $\bigcap F_n = \varnothing$. Logo, X não é compacto.

OBSERVAÇÃO — A proposição acima diz que todo espaço compacto goza da propriedade de Bolzano-Weierstrass. Mostraremos no parágrafo

seguinte que, para espaços métricos, esta propriedade é equivalente à compacidade. Existem, porém, espaços não-metrizáveis nos quais todo subconjunto infinito possui um ponto de acumulação mas nem tôda cobertura aberta possui uma subcobertura finita. (Vide Exerc. 4 .)

PROPOSIÇÃO 2 — *Todo subconjunto fechado F de um espaço compacto X é compacto.*

Demonstração: Seja $F \subset \bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda$ uma cobertura de F por abertos $U_\lambda \subset X$. A família que consiste dos U_λ, $\lambda \in L$, e mais o conjunto $U = X - F$, é uma cobertura aberta de X. Como X é compacto, existe uma cobertura finita $X = U_{\lambda_1} \cup \ldots \cup U_{\lambda_n} \cup U$. Como nenhum ponto de F pode pertencer a U, tem-se necessàriamente $F \subset U_{\lambda_1} \cup \ldots \cup U_{\lambda_n}$, o que prova a compacidade de F.

Diz-se que um subconjunto S de um espaço topológico X é *relativamente compacto* quando seu fecho $\overline{S}$ é um subconjunto compacto de X.

Resulta da proposição acima que todo subconjunto de um espaço compacto é relativamente compacto. Na reta, em virtude do Teorema de Borel-Lebesgue, são relativamente compactos todos os subconjuntos limitados. Mostraremos, mais adiante, que esta propriedade se estende aos espaços euclidianos R^n.

PROPOSIÇÃO 3 — *Seja X um espaço de Hausdorff. Todo subconjunto compacto $K \subset X$ é fechado em X.*

Demonstração: Seja $x \in X - K$. Devemos obter um aberto A tal que $x \in A$ e $A \cap K = \varnothing$. Ora, pela definição de espaço de Hausdorff, para cada $y \in K$ existem abertos A_y contendo x, e B_y contendo y, tais que $A_y \cap B_y = \varnothing$. Obtém-se dêste modo uma cobertura aberta $K \subset \bigcup_{y \in K} B_y$, da qual se pode extrair uma subcobertura finita $K \subset B_{y_1} \cup \ldots \cup B_{y_n}$. Correspondentemente, definimos $A = A_{y_1} \cap \ldots \cap A_{y_n}$. Vê-se que A é um aberto contendo x e nenhum ponto de K pode pertencer a K.

EXEMPLOS

11. Seja $(K_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família arbitrária de subconjuntos compactos K_λ de um espaço de Hausdorff X. A interseção $K = \bigcap K_\lambda$ é um subconjunto compacto de X. Com efeito, pela proposição acima, cada K_λ é fechado em X, donde K é fechado em X. Em particular, fixando um dos K_λ, K é fechado em K_λ. Como K_λ é compacto, segue-se que K é compacto (Prop. 2).

12. Os intervalos abertos (a, b) e os intervalos semi-abertos $[a, b)$ e $(a, b]$ da reta não são compactos, pois não são subconjuntos fechados de R.

13. Um subconjunto da reta é compacto se, e sòmente se, é limitado e fechado. A metade desta afirmação é o Teorema de Borel-Lebesgue. A outra metade resulta da Prop. 3 e do Ex. 8.

PROPOSIÇÃO 4 — *A imagem de um conjunto compacto por uma aplicação contínua é um conjunto compacto.*

Demonstração: Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma aplicação contínua. Dado um subconjunto compacto $K \subset X$, afirmamos que $f(K)$ é compacto. Com efeito, seja $f(K) \subset \bigcup_{\lambda \in L} V_\lambda$ uma cobertura de $f(K)$ por abertos $V_\lambda \subset Y$. Sendo f contínua, os conjuntos $f^{-1}(V_\lambda)$ constituem uma cobertura aberta do compacto K, da qual se pode extrair uma subcobertura finita $K \subset f^{-1}(V_{\lambda_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(V_{\lambda_n})$. Segue-se que $f(K) \subset V_{\lambda_1} \cup \cup \ldots \cup V_{\lambda_n}$, o que estabelece a compacidade de $f(K)$.

COROLÁRIO — *Tôda aplicação contínua $f : K \to Y$ de um espaço compacto K num espaço de Hausdorff Y é fechada.*

Com efeito, seja F um subconjunto fechado de K. Pela Prop. 2, F é compacto. Pela Prop. 4, $f(F)$ é compacto e, pela Prop. 3, $f(F)$ é fechado em Y.

PROPOSIÇÃO 5 — *Tôda aplicação $f : K \to Y$, contínua e biunívoca, de um espaço compacto K sôbre um espaço de Hausdorff Y é um homeomorfismo.*

Demonstração: Pelo corolário, f é fechada e portanto $f^{-1} : Y \to K$ é contínua, de acôrdo com a Prop. 16 do Cap. III.

A proposição acima simplifica consideràvelmente a verificação de que uma aplicação $f : K \to Y$, definida num espaço compacto K e tomando valôres num espaço de Hausdorff Y, é um homeomorfismo. Em particular, os contra-exemplos dados no início do § 3, Cap. II, foram possíveis apenas porque as aplicações não eram definidas em espaços compactos.

PROPOSIÇÃO 6 — *Tôda função real contínua $f : K \to R$, definida num espaço compacto K, é limitada e atinge os seus extremos. Isto é, existem pontos $x_0, x_1 \in K$ tais que $f(x_0) = inf. \{f(x); x \in K\}$ e $f(x_1) = sup. \{f(x); x \in K\}$.*

Demonstração: Pela Prop. 4, $f(K)$ é um subconjunto compacto da reta. Portanto, $f(K)$ é limitado e fechado (Ex. 13). Segue-se que f é limitada e que inf. $f(K)$ e sup. $f(K)$ pertencem a $f(K)$. (Vide Ex. 14, Cap. IV.) Por conseguinte, existem pontos $x_0, x_1 \in K$ nos quais f assume seu mínimo e seu máximo, respectivamente: $f(x_0) = \inf. f(K)$ e $f(x_1) = \sup. f(K)$.

Assim, quando M é um espaço métrico compacto, o espaço $\mathfrak{C}(M; N)$ das aplicações contínuas de M em N está contido no espaço $\mathfrak{B}(M; N)$ das aplicações limitadas de M em N, seja qual fôr o espaço métrico M. Mais

precisamente, $\mathfrak{C}(M;N)$ é um subconjunto fechado de $\mathfrak{B}(M;N)$ e portanto um espaço métrico completo, relativamente à distância $d(f, g) = \sup. \{d(f(x), g(x));\ x \in M\}$, sempre que N seja completo.

EXEMPLOS

14. Seja K um subconjunto compacto de um espaço métrico. Dado $a \in M - K$, tem-se $d(a, K) > 0$, e, além disso, existe $k_0 \in K$ tal que $d(a, K) = d(a, k_0)$. Com efeito, a aplicação $k \to d(a, k)$ é uma função real contínua definida no compacto K e portanto atinge o seu mínimo num ponto $k_0 \in K$. Como $x \notin K$, êste valor mínimo $d(a, k_0)$ é positivo. Note-se que, se $F \subset M$ é fechado e $a \in M - F$, então $d(a, F) > 0$ mas não existe necessàriamente um ponto $x_0 \in F$ tal que $d(a, F) = d(a, x_0)$. Daremos dois exemplos dêste fenômeno:

15. Seja $M = R - \{0\}$ a reta desprovida da origem. A semi-reta negativa $F = \{x \in R; x<0\}$ é um subconjunto fechado de M. Considerando o ponto $1 \in M$, tem-se $d(1, F) = 1$ mas, para cada ponto $x \in F$, é $d(1, x) = 1 - x > 1$, pois $x < 0$. A seqüência de pontos $x_n = -\dfrac{1}{n} \in F$ é tal que $d(1, x_n) \to 1$ mas (x_n) não converge em M. Neste exemplo, M não é completo. Por isso apresentamos o exemplo abaixo.

16. Seja M o espaço métrico completo formado pelas funções reais contínuas definidas no intervalo $[0, 2]$, com a métrica da convergência uniforme. Consideremos o conjunto de funções $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ onde, para cada $n \in N$, $f_n : [0, 2] \to R$ é a função definida por $f(x) = 0$ se $0 \leq x \leq 1 - 1/n$ ou se $1 + 1/n \leq x \leq 2$; $f_n(1) = 1 + 1/n$; f_n linear nos intervalos $[1 - 1/n, 1]$ e $[1, 1 + 1/n]$. (Vide figura.) É claro que f_n converge simplesmente para a função descontínua $g : [0, 2] \to R$, $g(x) = 0$ se $x \neq 1$, $g(1) = 1$. Tôda subseqüência de (f_n) também converge simplesmente para a função descontínua g. Segue-se que nenhuma subseqüência de (f_n) pode convergir uniformemente, pois o limite seria uma função contínua, para a qual a subseqüência convergiria também simplesmente, contrariando o fato de que já converge simplesmente para g. Logo, F não possui ponto de acumulação em M (*Cf.* Prop. 9, Cap. IV). Em particular, F é um subconjunto fechado de M. Seja $f : [0, 2] \to R$ a função idênticamente nula. Tem-se $d(f_n, f) = 1 + 1/n$, para cada $f_n \in F$, e por conseguinte, $d(f, F) =$

$= \inf. \{d(f, f_n); f_n \in F\} = 1$, sem que exista um elemento $f^* \in F$ com $d(f, f^*) = d(f, F)$.

17. Sejam K um subconjunto compacto e F um subconjunto fechado de um espaço métrico M. Se $K \cap F = \varnothing$ então $d(K, F) > 0$. Não se pode garantir a existência de pontos $k_0 \in K$ e $x_0 \in F$ tais que $d(K, F) = d(k_0, x_0)$, como vimos nos exemplos acima, mesmo se K se reduz a um pònto. Mas existe $k_0 \in K$ tal que $d(K, F) = d(k_0, F)$. A fim de demonstrar estas afirmações basta observar que $d(K, F)$, definido como o ínfimo do conjunto $\{d(k, x); k \in K, x \in F\}$, pode ser também descrito como $d(K, F) = \inf. \{d(k, F); k \in K\}$, isto é, como o ínfimo da função real contínua $k \to d(k, F)$, definida no compacto K. Como F é fechado e disjunto de K, esta função assume sòmente valôres positivos, cujo mínimo é atingido num ponto $k_0 \in K$, de acôrdo com o Teorema de Weierstrass: $d(K, F) = d(k_0, F) > 0$.

18. O resultado acima é muitas vêzes usado sob a forma seguinte: dados um compacto $K \subset M$ e um aberto U em M, com $K \subset U$, a distância K ao complementar de U é positiva: $d(K, M - U) > 0$. Em particular, existe um $\epsilon > 0$ tal que todo ponto de M que dista menos de ϵ de algum ponto de K está contido em U. Ou seja $B(K; \epsilon) \subset U$, na notação do Ex. 5, Cap. III.

Lema — *Seja $X \times K$ o produto cartesiano de um espaço topológico arbitrário X por um espaço compacto K. Dado um ponto $x \in X$, seja $U \subset X \times K$ um aberto tal que $x \times K \subset U$. Então existe um aberto A em X, com $x \in A$ e $A \times K \subset U$.*

Demonstração: De acôrdo com a definição de aberto num espaço produto, para cada ponto $(x, k) \in x \times K$ existem abertos A_k em X, $x \in A_k$, e B_k em K, $k \in B_k$, tais que $(x, k) \in A_k \times B_k \subset U$. Obtém-se assim uma cobertura aberta $x \times K \subset \bigcup_{k \in K} A_k \times B_k$ e, como $x \times K$ é compacto, por ser homeomorfo a K, existe uma subcobertura finita $x \times K \subset (A_{k_1} \times B_{k_1}) \cup \ldots \cup (A_{k_n} \times B_{k_n}) \subset U$. Seja $A = A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_n}$. O conjunto A é aberto em X, contém x e $A \times K \subset U$.

Proposição 7 — *Seja X um espaço topológico qualquer. Se K é compacto, então a projeção $p_1 : X \times K \to X$ é uma aplicação fechada.*

Demonstração: Seja $F \subset X \times K$ um subconjunto fechado. Para provar que $p_1(F)$ é fechado em X, seja $x \in X - p_1(F)$. Então, não existe em F ponto algum (x, k), cuja primeira coordenada seja x. Em outras palavras $x \times K \subset U = (X \times K) - F$. Pelo lema anterior, existe um aberto A em X, com $x \in A$ e $A \times K \subset U$. Ou seja, $A \times K$ não contém ponto algum de F e portanto A é disjunto de $p_1(F)$, como queríamos demonstrar.

Corolário — *Para que uma aplicação $f : X \to K$, de um espaço topológico arbitrário X num espaço compacto K, seja contínua é suficiente que o seu gráfico $G(f)$ seja um subconjunto fechado do produto cartesiano $X \times K$. Se X fôr um espaço de Hausdorff, a condição também é necessária.*

Com efeito, seja $\varphi : G(f) \to X$, $\varphi = p_1 | G(f)$, a restrição da projeção p_1 ao gráfico $G(f)$. Como $\varphi(x, f(x)) = x$, vê-se que φ é uma aplicação contínua e biunívoca de $G(f)$ sôbre X. Sendo $G(f)$ fechado em $X \times K$, φ é também uma aplicação fechada, em virtude da Prop. 7. Por conseguinte, φ é um homeomorfismo de $G(f)$ sôbre X. Sua inversa, $x \to (x, f(x))$ é, pois, uma aplicação contínua e daí se segue que $x \to f(x)$ é contínua, como queríamos demonstrar.

Proposição 8 — *O produto cartesiano $X \times Y$ é compacto se, e sòmente se, X e Y são espaços compactos.*

Demonstração: Como as projeções $p_1 : X \times Y \to X$ e $p_2 : X \times Y \to Y$ são contínuas sôbre X e Y respectivamente, segue-se da Prop. 4 que se $X \times Y$ fôr compacto os fatôres X e Y também o serão. Para demonstrar a recíproca, seja $(F_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de subconjuntos fechados $F_\lambda \subset X \times Y$, com a propriedade da interseção finita. Acrescentando a esta família todos os conjuntos da forma $F_{\lambda_1} \cap \ldots \cap F_{\lambda_n}$, continuamos a ter uma família de fechados com a propriedade da interseção finita, agora com a propriedade adicional de que a interseção de um número finito de conjuntos da família ainda pertence à mesma. Pela Prop. 7, os conjuntos $p_1(F_\lambda)$, $\lambda \in L$, constituem uma família de fechados em X, com a propriedade da interseção finita, porque $p_1(F_{\lambda_1}) \cap \ldots \cap p_1(F_{\lambda_n}) \supset p_1(F_{\lambda_1} \cap \ldots \cap F_{\lambda_n}) \neq \varnothing$. Como X é compacto, existe um ponto $x \in \bigcap_\lambda p_1(F_\lambda)$. Isto significa que, para todo $\lambda \in L$, $F_\lambda \cap (x \times Y) \neq \varnothing$. Os conjuntos $F_\lambda \cap (x \times Y)$, $\lambda \in L$, constituem uma família de fechados em $x \times Y$, com a propriedade da interseção finita, pois $[F_{\lambda_1} \cap (x \times Y)] \cap \ldots \cap [F_{\lambda_n} \cap (x \times Y)] = (F_{\lambda_1} \cap \ldots \cap F_{\lambda_n}) \cap (x \times Y) \neq \varnothing$, em virtude de $F_{\lambda_1} \cap \ldots \cap F_{\lambda_n}$ pertencer à família (F_λ). Ora, $x \times Y$ é homeomorfo a Y e portanto compacto. Logo, existe em $x \times Y$ um ponto (x, y) pertencente a todos os $F_\lambda \cap (x \times Y)$. Em particular, (x, y) pertence a todos os F_λ, como queríamos demonstrar.

Corolário — *O produto cartesiano* $X_1 \times \ldots \times X_n$ *é compacto se, e sòmente se, cada um dos fatôres* $X_1, \ldots, X_n$ *é compacto.*

Como $X_1 \times \ldots \times X_n = (X_1 \times \ldots \times X_{n-1}) \times X_n$, o corolário resulta de repetidas aplicações da Prop. 8.

EXEMPLOS

19. Sejam K, P subconjuntos compactos de um espaço métrico M.

Existem pontos $k \in K$ e $p \in P$ tais que $d(K, P) = d(k, p)$. Com efeito, a função contínua $(x, y) \to d(x, y)$ atinge o seu mínimo em algum ponto (k, p) pertencente ao compacto $K \times P$ onde ela é definida. Em particular, se $K \cap P = \varnothing$, então $d(K, P) > 0$.

20. Seja $I^n = I \times I \times \ldots \times I = \{x = (x^1, \ldots, x^n) \in R^n,\ 0 \leq x^1 \leq \leq 1, \ldots, 0 \leq x^n \leq 1\}$ o *cubo unitário* de espaço euclidiano R^n. Resulta do Corolário acima que I^n é compacto. Também em virtude do mesmo corolário, é compacto o *toro* $T^2 = S^1 \times S^1$, onde $S^1 = \{(x, y) \in R^2;\ x^2 + + y^2 = 1\}$. Com efeito, o círculo S^1 é compacto pois é a imagem do intervalo $[0, 1]$ pela aplicação contínua $f : [0, 1] \to S^1$, $f(t) = (\cos 2\pi t, \text{sen } 2\pi t) = e^{2\pi i t}$. O toro T^2 pode, portanto, ser considerado também como imagem do quadrado $I^2 = = [0, 1] \times [0, 1]$ pela aplicação contínua $g : I^2 \to T^2$, onde $g(s, t) = = (f(s), f(t)) = (e^{2\pi i s}, e^{2\pi i t})$. Costuma-se ainda identificar o toro T^2 com uma superfície de revolução S em R^3, gerada por um círculo vertical que não toca o eixo de rotação. Um homeomorfismo $\varphi : S \to T^2$ pode ser estabelecido fixando-se na superfície S um meridiano M e um paralelo P, e tomando-se homeomorfismos $h : S^1 \to M$, $k : S^1 \to P$. Os círculos M e P funcionarão como "eixos" de um sistema de coordenadas na superfície S. As duas coordenadas de um ponto $p \in S$ serão $z_1, z_2 \in S^1$, determinadas pela condição de que o paralelo que passa por p corta M no ponto $h(z_1)$ e o meridiano que passa por p corta P no ponto $k(z_2)$. Pondo-se $\varphi(p) = (z_1, z_2)$, fica definido o homeomorfismo $\varphi : S \to T^2$. (Deixamos de verificar rigorosamente que φ é um homeomorfismo porque isto nos obrigaria a definir com mais cuidado a superfície S, e nos afastaria um pouco do objetivo dêste capítulo.) Mais geralmente, pode-se considerar o *toro n-dimensional* $T^n = = S^1 \times \ldots \times S^1$ (n fatôres), o qual é compacto, ainda em virtude do corolário anterior.

Lembramos que um espaço topológico X chama-se *normal* quando para todo par de fechados $F, G \subset X$ com $F \cap G = \emptyset$ existem abertos U, V em X tais que $F \subset U$, $G \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$. (Vide Cap. III, Corolário da Prop. 10.)

LEMA — *Para que um espaço topológico X seja normal, é necessário e suficiente que a seguinte condição seja satisfeita: Dados em X um fechado F e um aberto A, com $F \subset A$, existe um aberto U em X, tal que $F \subset U$ e $\overline{U} \subset A$.*

Demonstração: Seja X normal. Dados $F \subset A$, com F fechado e A aberto, pomos $G = X - A$ e obtemos um par de fechados F, G com $F \cap G = \emptyset$. Logo, existem U, V abertos com $F \subset U$, $G \subset V$ e $U \cap V = \emptyset$. Desta última igualdade, segue-se $U \subset X - V$ e, como $X - V$ é fechado, $\overline{U} \subset X - V$. Mas $G \subset V$ dá $X - V \subset X - G = A$, donde $\overline{U} \subset A$, como queríamos demonstrar. Para provar a recíproca, suponhamos cumprida a condição do lema e sejam F, G fechados disjuntos em X. Pondo $A = X - G$ temos A aberto, $F \subset A$, donde existe U aberto com $F \subset U, \overline{U} \subset A$. Seja $V = X - \overline{U}$. Então, V é aberto em X e, como $\overline{U} \subset A = X - G$, temos $G \subset X - \overline{U} = V$. Finalmente, de $U \subset \overline{U}$ segue-se que $V = X - \overline{U}$ é disjunto de U, o que demonstra a normalidade de X.

PROPOSIÇÃO 9 — *Todo espaço de Hausdorff compacto é normal.*

Demonstração: Sejam F e G dois subconjuntos fechados disjuntos de um espaço de Hausdorff compacto X. Pela Prop. 2, F e G são compactos. Como na demonstração da Prop. 3, fixamos arbitràriamente $x \in F$ e, para cada $y \in G$, obtemos abertos U_y^x, V_y^x tais que $x \in U_y^x$, $y \in V_y^x$, $U_y^x \cap V_y^x = \emptyset$ dos quais extraímos uma subcobertura finita $G \subset V_{y_1}^x \cup \ldots \cup V_{y_m}^x$. Pomos $U^x = U_{y_1}^x \cap \ldots \cap U_{y_m}^x$ e $V^x = V_{y_1}^x \cup \ldots \cup V_{y_m}^x$, e temos U^x, V^x abertos, $x \in U^x$, $G \subset V^x$, $U^x \cap V^x = \emptyset$. Fazendo agora x variar em F, os conjuntos U^x constituem uma cobertura de F, da qual extraímos uma subcobertura finita $F \subset U^{x_1} \cup \ldots \cup U^{x_n}$. Pomos, finalmente, $U = U^{x_1} \cup \ldots \cup U^{x_n}$ e $V = V^{x_1} \cap \ldots \cap V^{x_n}$, o que demonstra a proposição.

COROLÁRIO — *Seja X um espaço de Hausdorff compacto. Dados em X um fechado F e um aberto A com $F \subset A$, existe um aberto U tal que $F \subset U$ e $\overline{U} \subset A$.*

Isto resulta da Prop. 9, juntamente com o lema que a antecede.

OBSERVAÇÕES SÔBRE A TOPOLOGIA CO-INDUZIDA POR UMA APLICAÇÃO.

Sejam X, Y espaços topológicos e $\varphi : X \to Y$ uma aplicação. Diz-se que a topologia de Y é *co-induzida* pela (topologia de X através da) aplicação φ quando a seguinte condição é válida: um subconjunto $F \subset Y$ é fechado

se, e sòmente se, $\varphi^{-1}(F)$ é fechado em X. Esta definição é òbviamente equivalente à que foi dada no Cap. III. Se a topologia de Y é co-induzida por φ então, para cada $F \subset Y - \varphi(X)$, $\varphi^{-1}(F) = \emptyset$ é fechado em X, donde F é fechado em Y. Assim, $Y - \varphi(X)$ é um espaço discreto. Segue-se que a topologia co-induzida só é interessante quando $\varphi : X \to Y$ é sôbre Y.

A vantagem de saber que a topologia de Y é co-induzida por uma aplicação $\varphi : X \to Y$ resulta do seguinte critério:

Se a topologia de Y é co-induzida por uma aplicação $\varphi : X \to Y$ então dado qualquer espaço topológico Z, uma aplicação $f : Y \to Z$ é contínua se, e sòmente se, a aplicação $f \circ \varphi : X \to Z$ é contínua.

Em particular, tomando $Z = Y$ e $f = id. : Y \to Y$, vemos que $\varphi : X \to Y$ é contínua, fato que, de resto, é evidente a partir da definição. Não sòmente φ é contínua mas a topologia de Y é a mais fina segundo a qual φ é contínua.

Veremos, logo mais, um exemplo geométrico que ilustrará a utilidade do critério acima.

Diremos que uma aplicação $\varphi : X \to Y$ de um espaço topológico X *sôbre* um espaço topológico Y, é uma *aplicação quociente* quando a topologia de Y fôr co-induzida por φ.

Notemos o seguinte:

Tôda aplicação contínua fechada (ou aberta) $\varphi : X \to Y$ de um espaço X sôbre um espaço Y é uma aplicação quociente.

Com efeito, dado $F \subset Y$, se F fôr fechado, $\varphi^{-1}(F)$ também será porque φ é contínua. Recìprocamente, se $\varphi^{-1}(F)$ fôr fechado então $\varphi(\varphi^{-1}(F)) = F$ será fechado pois φ é uma aplicação fechada. Se φ fôr contínua e aberta, raciocinar com abertos. A igualdade $\varphi(\varphi^{-1}(A)) = A$ vale porque φ é sôbre Y.

Como corolário, temos o importante critério:

Se X fôr compacto e Y fôr um espaço de Hausdorff, tôda aplicação contínua $\varphi : X \to Y$ sôbre Y é uma aplicação quociente.

Vide Corolário da Prop. 4. Em resumo, temos o seguinte:

Sejam K um espaço compacto, Y um espaço de Hausdorff e $\varphi : K \to Y$ uma aplicação contínua sôbre Y. Dado qualquer espaço topológico Z, uma aplicação $f : Y \to Z$ é contínua se, e sòmente se, $f \circ \varphi : K \to Z$ fôr contínua.

Observamos que esta afirmação contém a Prop. 5: se $\varphi : K \to Y$ fôr contínua, biunívoca e sôbre Y, então $\varphi^{-1} : Y \to K$ é contínua porque $\varphi^{-1} \circ \varphi = id. : K \to K$ é contínua.

Como aplicação, demonstremos o seguinte:

Todo subconjunto compacto convexo $K \subset R^n$ tal que int. $K \neq \varnothing$ é homeomorfo a uma bola fechada $D \subset R^n$.

Mediante uma translação, podemos supor que $0 \in$ int. K. Existe uma bola fechada D de centro 0, contida em K. Seja S a esfera fronteira de D. Para mostrar que D e K são homeomorfos, começaremos provando que S é homeomorfa à fronteira $\dot{K}$ do conjunto K. Para isso, definiremos uma aplicação $\rho : \dot{K} \longrightarrow S$, pondo $\rho(x) = r\dfrac{x}{|x|}$, onde r é o raio da bola D. $\rho(x)$ é a projeção central do ponto x sôbre a esfera S. Evidentemente ρ é contínua. Afirmamos que ρ é 1–1. Com efeito, suponhamos que existissem $x, y \in \dot{K}$ com $x \neq y$ e $\rho(x) = \rho(y)$. Então, x, y pertenceriam à mesma semi-reta de origem 0. Escolhendo a notação de forma que $y \in [0, x]$, temos $y = (1 - \lambda)x, 0 < \lambda < 1$. A aplicação $h : z \longrightarrow x + \lambda(z - x)$ é um homeomorfismo do espaço R^n (homotetia de centro x e razão λ) tal que $h(0) = y$. Como K é convexo, $h(K) = K$. Em particular, $h(D)$ é uma vizinhança de y, contida em K, o que contradiz o fato de ser $y \in \dot{K}$.

Observemos que, dado qualquer $z \in K$, a semi-reta $\{tz; t \geq 0\}$, de origem 0 e passando por z, corta a fronteira $\dot{K}$ em algum ponto. Com efeito, como K é limitado (vide Ex. 8) $tz \in R^n - K$ para $t \geq 0$ suficientemente grande. Seja t_0 o sup. dos números reais ≥ 0 tais que o segmento $\{tz; 0 \leq t \leq t_0\}$ está contido em K. Vê-se sem dificuldade que $t_0 z \in \dot{K}$. Em particular, tomando $z \in S$, conclui-se que $z = \rho(x)$ para algum $x \in \dot{K}$ (x é o ponto onde a semi-reta $\overrightarrow{0z}$ corta $\dot{K}$). Logo, $\rho : \dot{K} \longrightarrow S$ é sôbre S. Sendo $\dot{K}$ um subconjunto fechado de K, é compacto, donde ρ é um homeomorfismo.

Seja $I = [0, 1]$. A aplicação $\varphi : \dot{K} \times I \rightarrow K$, definida por $\varphi(x, t) = tx$ é contínua. Como acabamos de ver, todo ponto $z \in K$ pertence a algum segmento de reta que liga 0 a um ponto da fronteira $\dot{K}$. Logo, φ é sôbre K. Sendo $\dot{K} \times I$ compacto (Prop. 8) e K de Hausdorff, concluímos que φ é

uma aplicação quociente. Definamos uma aplicação $f : K \to \dot{D}$ pondo $f(tx) = t\rho(x)$, onde $0 \leq t \leq 1$ e $x \in \dot{K}$. Vimos acima que um segmento de reta com extremo 0 não pode encontrar a fronteira $\dot{K}$ em mais de um ponto. Logo, $tx = t'x'$ com $x, x' \in \dot{K}$ e $t \in I$ implica $x = x'$ (donde $t = t'$) ou $t = t' = 0$. Segue-se que f é bem definida. Além disso, como $f \circ \varphi : (t, x) \to t\rho(x)$ é contínua, segue-se que f é uma aplicação contínua. Verifica-se imediatamente que f é $1 - 1$ e sôbre D, e portanto um homeomorfismo, como queríamos demonstrar.

$$\begin{array}{ccc} \dot{K} \times I & & \\ \downarrow \varphi & \searrow & \\ K & \xrightarrow{f} & D \end{array}$$

§ 3. Conjuntos Compactos no Espaço Euclidiano

Em qualquer espaço métrico, um subconjunto compacto é sempre limitado (Ex. 8) e fechado (Prop. 3). No espaço euclidiano vale a recíproca.

Na proposição abaixo, R^n é tomado com uma das suas métricas usuais:

$$|x-y| = \sqrt{\sum_i (x^i - y^i)^2}\,, \quad |x - y| = \sum_i |x^i - y^i|, \text{ ou } |x - y| = \text{máx.}|x^i - y^i|.$$

Proposição 10 (*Teorema de Borel-Lebesgue*) — *Um subconjunto S do espaço euclidiano R^n é compacto se, e sòmente se, é limitado e fechado.*

Demonstração: Sendo limitado, S está contido num paralelepípedo $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] = P$: para cada $i = 1, \ldots, n$ a projeção $p_i(S)$ está contida num intervalo fechado $[a_i, b_i]$ da reta e portanto S cabe no paralelepípedo P. Pela Prop. 8, P é compacto. Sendo fechado em R^n, S é fechado em P. Pela Prop. 2, S é compacto.

Corolário — *Um subconjunto S do espaço euclidiano R^n é relativamente compacto se, e sòmente se, é limitado.*

Com efeito, um conjunto é limitado se, e sòmente se, seu fecho é limitado e fechado.

EXEMPLOS

21. O Ex. 16 nos fornece um subconjunto limitado e fechado F no espaço vetorial normado completo $E = \mathfrak{C}([0, 2]; R)$. Como F não possui ponto de acumulação, embora seja um conjunto infinito, segue-se que F não é compacto.

22. No espaço de Hilbert H, das seqüências de quadrado somável (vide Cap. VI, Ex. 11) consideremos o conjunto $F = \{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$ onde, para

cada $n \in N$ $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ é a seqüência cujos têrmos são todos nulos, com exceção do n-ésimo, que é igual a 1. Dados $m \neq n$ quaisquer, temos $|e_m - e_n| = \sqrt{2}$. Segue-se que nenhuma seqüência de elementos distintos de F é de Cauchy e por conseguinte F não possui pontos de acumulação. Logo, F é um subconjunto limitado, fechado e não compacto de H. A razão de ser dêste exemplo e do anterior é que os espaços normados H e $\mathfrak{C}([0, 2]; R)$ têm dimensão infinita. (Vide Ex. 29, a seguir.)

23. *Espaços normados de dimensão finita.* Lembramos que, se E e F são espaços vetoriais normados, um *isomorfismo* $f : E \to F$ é uma aplicação linear contínua e biunívoca de E sôbre F, cuja inversa $f^{-1} : F \to E$ (que é necessàriamente linear) é também contínua.

a) *Todo espaço vetorial normado E de dimensão finita n é isomorfo ao espaço euclidiano R^n.*

Com efeito, seja $\{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de E. A aplicação linear $f : R^n \to E$, definida por $f(x^1, \ldots, x^n) = \Sigma x^i u_i$ é contínua (*Cf.* Prop. 2, Cap. II) e biunívoca, de R^n sôbre E. Resta apenas provar que f é um homeomorfismo. Em virtude da Prop. 10, a esfera unitária $S^{n-1} = \{x \in \in R^n; |x| = 1\}$ é um conjunto compacto. Como f é biunívoca, $x \in S^{n-1}$ implica $|f(x)| > 0$. Segue-se, então, do Teorema de Weierstrass que existe um número real $m > 0$ tal que $|f(v)| \geq m$ para todo $v \in R^n$ com $|v| = 1$. Então, se x é qualquer vetor não nulo em R^n, $|f(x/|x|)| \geq m$, ou seja, $|f(x)| \geq m|x|$, pois f é linear. Òbviamente, esta última desigualdade vale ainda para $x = 0$. Segue-se que f é um homeomorfismo. (*Cf.* Cap. II, Prop. 6, Corol. 1.)

b) *Sejam E e F espaços vetoriais normados. Se E tem dimensão finita, tôda aplicação linear $f : E \to F$ é contínua.*

Como E é isomorfo a R^n, basta mostrar que tôda aplicação linear $f : R^n \to F$ é contínua. Seja $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ a base canônica de R^n. Pondo $f(e_1) = a_1, \ldots, f(e_n) = a_n$, a linearidade de f nos dá $f(x^1, \ldots, x^n) = \Sigma x^i a_i$, donde se conclui a continuidade de f, já que as operações fundamentais em F são contínuas, em virtude da Prop. 2 do Cap. II.

c) *Duas normas quaisquer num espaço vetorial de dimensão finita E são sempre equivalentes e E é completo em relação a qualquer delas.*

Escolhamos uma base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ no espaço vetorial E. Como na demonstração de *a*), isto define um isomorfismo $R^n \to E$ que não depende da norma tomada em E. Assim, se indicarmos com E' e E'' o mesmo espaço E com duas normas distintas e com $i : E \to E''$ a aplicação identidade,

obteremos o diagrama comutativo onde $f : R^n \to E'$ e $g : R^n \to E''$ são os isomorfismos definidos pela base escolhida. A "comutatividade" do diagrama significa que $i \circ f = g$. Segue-se que $i = g \circ f^{-1}$ e portanto i é contínua. De maneira análoga se vê que a aplicação identidade $j : E'' \to E'$ também é contínua. Finalmente, E é completo porque R^n o é e todo isomorfismo de espaços vetoriais normados é um homeomorfismo uniforme.

d) Todo subespaço de dimensão finita E de um espaço vetorial normado F é fechado em F.

Com efeito, a norma induzida por F em E o torna um espaço completo e portanto fechado em F. (Prop. 6, Cap. VI.)

§ 4. Espaços Métricos Compactos

Passaremos agora a expor algumas propriedades especiais dos espaços métricos compactos, que não possuem análogas ou não são válidas para espaços compactos quaisquer.

Um espaço métrico M diz-se *totalmente limitado* quando, para todo $\epsilon > 0$, pode-se exprimir $M = S_1 \cup \ldots \cup S_n$ como reunião de um número finito de subconjuntos, cada um dos quais tem diâmetro $< \epsilon$.

Um espaço métrico M é totalmente limitado se, e sòmente se, para cada $\epsilon > 0$, existe um número finito de bolas de raio ϵ que cobrem M. Com efeito, todo conjunto de diâmetro $< \epsilon$ está contido numa bola de raio ϵ (e centro em qualquer ponto do conjunto).

Em outras palavras, para que um espaço métrico M seja totalmente limitado, é necessário e suficiente que, dado $\epsilon > 0$ arbitrário, exista um número finito de pontos $x_1, \ldots, x_n \in M$ tais que todo ponto $x \in M$ dista menos de ϵ de algum dos x_i.

Todo subespaço X de um espaço métrico totalmente limitado é ainda totalmente limitado, pois se $M = S_1 \cup \ldots \cup S_n$ então $X = (X \cap S_1) \cup \cup \ldots \cup (X \cap S_n)$, com $\delta(X \cap S_i) \leq \delta(S_i)$.

EXEMPLOS

24. Todo subconjunto limitado S da reta é totalmente limitado. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, podemos decompor a reta numa infinidade de intervalos $[n\delta, (n + 1)\delta]$, de igual comprimento δ, com $\delta < \epsilon$. Sendo limitado, S está contido numa reunião finita dêsses intervalos. Anàlogamente, de-

compondo R^n numa reunião de pequenos paralelepípedos congruentes $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ (mediante decomposição de cada um dos eixos em partes iguais), vemos que todo subconjunto limitado do espaço euclidiano R^n é totalmente limitado.

25. Em qualquer espaço métrico, um conjunto totalmente limitado é evidentemente limitado. A recíproca é falsa. No espaço de Hilbert H (vide Ex. 11, Cap. VI), seja $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n \ldots\}$ onde $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ é o vetor cujas coordenadas são tôdas nulas, exceto a n-ésima, que é igual a 1. S é limitado, pois $d(e_m, e_n) = \sqrt{2}$ para quaisquer $m \neq n$. Os únicos subconjuntos de S com diâmetro < 1 são os pontos. Logo, S não pode ser expresso como reunião de um número finito de conjuntos de diâmetro < 1 e portanto não é totalmente limitado. Naturalmente, isto implica que nenhum subconjunto de H que contenha S é totalmente limitado. Assim, por exemplo, não é totalmente limitada a bola unitária $D = \{x \in H; |x| \leq 1\}$.

Proposição 11 — *Se um subconjunto S de um espaço métrico M é totalmente limitado, seu fecho $\bar{S}$ também é.*

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$ arbitrário, podemos escrever $S = S_1 \cup \cup \ldots \cup S_n$, com $\delta(S_i) < \epsilon, i = 1, \ldots, n$. Então, $\bar{S} = \bar{S}_1 \cup \ldots \cup \bar{S}_n$ e a proposição reduz-se ao seguinte

Lema — *Num espaço métrico M, o diâmetro de um conjunto X é igual ao diâmetro do seu fecho $\bar{X}$.*

Demonstração: Como $X \subset \bar{X}$, tem-se $\delta(X) \leq \delta(\bar{X})$. Por outro lado, dados $x, y \in \bar{X}$ quaisquer, temos $x = \lim x_n$, $y = \lim y_n$, com $x_n, y_n \in X$, e portanto $d(x_n, y_n) \leq \delta(X)$ para todo $n \in N$. Segue-se que $d(x, y) = = \lim d(x_n, y_n) \leq \delta(X)$. Assim, a distância entre dois pontos arbitrários $x, y \in \bar{X}$ não excede $\delta(X)$ e, por conseguinte, $\delta(\bar{X}) \leq \delta(X)$, completando a demonstração.

Proposição 12 — *As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico M são equivalentes:*

1) *M é compacto;*

2) *Todo subconjunto infinito de M possui um ponto de acumulação;*

3) *Tôda seqüência em M possui uma subseqüência convergente;*

4) *M é completo e totalmente limitado.*

Demonstração: Estabeleceremos as implicações 1) $\Rightarrow$ 2, 2) $\Rightarrow$ 3), 3) $\Rightarrow$ 4) e 4) $\Rightarrow$ 1).

Pela Prop. 1, 1) $\Rightarrow$ 2) mesmo quando M não é metrizável.

2) $\Rightarrow$ 3) — Dada uma seqüência (x_n) em M, duas coisas podem acontecer: ou o conjunto dos valôres x_n é finito ou é infinito. No primeiro caso, algum valor $a = x_{n_1} = x_{n_2} = \ldots = x_{n_k} = \ldots$ deve repetir-se infinitas vêzes e portanto a subseqüência (x_{n_k}) trivialmente converge para o ponto $a \in M$. No segundo caso, o conjunto $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ deverá possuir um ponto de acumulação $x \in M$, de acôrdo com a hipótese 2). Tôda vizinhança de x conterá têrmos x_n com índices arbitràriamente elevados e portanto x será limite de uma subseqüência de (x_n). (*Cf.* Prop. 3, Cap. IV.)

3) $\Rightarrow$ 4) — Admitindo 3) como hipótese, provemos primeiramente que M é completo. Ora, tôda seqüência de Cauchy em M, possuindo uma subseqüência convergente, é, ela própria, convergente. (Prop. 3, Cap. VI.) Para provar que M é totalmente limitado, seja dado $\epsilon > 0$ e mostremos que M pode ser expresso como reunião de um número finito de bolas $B(x_i; \epsilon/2)$. Tomemos $x_1 \in M$ qualquer. Se $M = B(x_1; \epsilon/2)$, a afirmação está provada. No caso contrário, existirá um ponto $x_2 \in M$, com $d(x_2, x_1) \geq \epsilon/2$. Se fôr $M = B(x_1; \epsilon/2) \cup B(x_2; \epsilon/2)$, estará concluída a demonstração. Caso contrário, existirá $x_3 \in M$, com $d(x_3, x_2) \geq \epsilon/2$, $d(x_3, x_1) \geq \epsilon/2$. Prosseguindo, veremos que, ou existe um número finito de pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ em M tais que $M = B(x_1; \epsilon/2) \cup \ldots \cup B(x_n; \epsilon/2)$, ou então é possível obter uma seqüência de pontos $x_n \in M$, com $d(x_m, x_n) \geq \epsilon/2$ para $m \neq n$ quaisquer. Tal seqüência, porém, não possuiria uma subseqüência de Cauchy nem, portanto, uma subseqüência convergente e violaria, por conseguinte, a hipótese 3). Logo, a primeira alternativa é a que ocorre, e M é totalmente limitado.

4) $\Rightarrow$ 1) — Suponhamos, por absurdo, que M satisfaz 4) mas existe uma cobertura aberta $M = \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ que não possui subcobertura finita. Definiremos uma seqüência decrescente de subconjuntos $S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_n \supset \ldots$, onde o diâmetro de S_n é $< 1/n$ e nenhum dos S_n pode ser, coberto por um número finito de conjuntos V_λ. Sendo totalmente limitado, M pode ser expresso como reunião de um número finito de conjuntos de diâmetro < 1. Pelo menos um dêsses conjuntos — que chamaremos S_1 — não pode ser coberto por um número finito dos V_λ (pois se todos pudessem, M seria coberto por uma quantidade finita dos V_λ). Mas S_1 também é totalmente limitado, logo, é reunião de um número finito de subconjuntos de diâmetro $< 1/2$. Pelo menos um dêsses conjuntos — que chamaremos de S_2 — não está contido numa reunião finita dos V_λ, pois se todos estivessem, sua reunião S_1 também estaria. Prosseguindo anàlogamente, obte-

remos uma seqüência $S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_n \supset \ldots$ com as propriedades desejadas. Evidentemente, nenhum dos S_n é vazio. Tomemos, para cada $n \in N$, um ponto $x_n \in S_n$. Como $\delta(S_n) < 1/n$, (x_n) é uma seqüência de Cauchy em M. Sendo M completo, existe $\lim x_n = x \in M$. O ponto x está contido em algum aberto V_λ da cobertura. Logo, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x; \epsilon) \subset V_\lambda$. Podemos tomar n tão grande que $1/n + d(x_n, x) < \epsilon$. Então, $S_n \subset B(x; \epsilon)$ pois $y \in S_n$ implica $d(y, x_n) < 1/n$ e portanto $d(y, x) \leq \leq d(y, x_n) + d(x_n, x) < 1/n + d(x_n, x) < < \epsilon$. Mas então $S_n \subset V_\lambda$, contrariando o fato de que S_n não está contido numa reunião finita dos conjuntos V_λ. Isto encerra a demonstração.

Observações — 1) Embora a propriedade de ser completo não seja topológica, a proposição acima mostra que um espaço métrico compacto é completo em relação a qualquer métrica compatível com sua topologia. Pode-se, recìprocamente, demonstrar que se M é um espaço métrico não compacto, a topologia de M pode ser definida por uma métrica relativamente à qual M não é completo. (Vide Exerc. 24.)

2) Um espaço topológico X chama-se *seqüencialmente compacto* quando tôda seqüência em X possui uma subseqüência convergente. Para espaços métricos, como vimos, esta noção coincide com a de compacidade. Mais geralmente, a demonstração acima nos permite concluir que, num espaço topológico em que todo ponto possui um sistema fundamental de vizinhanças enumerável, a propriedade de Bolzano-Weierstrass implica compacidade seqüencial. Em particular, um espaço topológico compacto em que todo ponto possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças é seqüencialmente compacto. Existem, porém, espaços topológicos não-compactos que são seqüencialmente compactos e cada um dos seus pontos possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças. [Vide N. Bourbaki, "Topologie Générale", Cap. I, § 10, Exerc. 22 (2.ª ed.) e Cap. IX, § 2, Exerc. 15.] Existem ainda espaços topológicos compactos que não são seqüencialmente compactos, como se vê no exemplo abaixo.

EXEMPLOS

26. Seja X o conjunto de tôdas as funções $f : [0, 1] \to [0, 1]$. Como foi visto no Cap. IV, § 6, pode-se introduzir em X uma topologia, chamada

topologia da convergência simples, relativamente à qual se tem $f_n \to f$ em X se, e sòmente se, $f_n(x) \to f(x)$ em $[0, 1]$ para todo $x \in [0, 1]$. Pelo Teorema de Tychonov, (vide Cap. IX) X é compacto. Exibiremos, entretanto, uma seqüência de funções $f_n \in X$ que não possui subseqüência convergente. Como se sabe, existe uma aplicação *biunívoca* $S \to x_S$ que associa a todo subconjunto infinito $S = \{n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots\} \subset N$ um número real $x_S \in [0, 1]$. As funções $f_n : [0, 1] \to [0, 1]$ serão definidas pondo-se

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 0, \text{ se } x \text{ não fôr da forma } x_S; \\ f_n(x_S) &= 0, \text{ se } n \notin S \text{ ou se } n = n_i \in S, \; i \text{ par}; \\ f_n(x_S) &= 1, \text{ se } n = n_j \in S, \; j \text{ ímpar}. \end{aligned}$$

Nenhuma subseqüência de (f_n) converge simplesmente no intervalo $[0, 1]$. Com efeito, dada uma subseqüência $(f_{n_1}, f_{n_2}, \ldots, f_{n_k}, \ldots)$, seja $S = \{n_1 < < n_2 < \ldots < n_k < \ldots\}$. Temos $f_{n_2}(x_S) = f_{n_4}(x_S) = \ldots = 0$ e $f_{n_1}(x_S) = = f_{n_3}(x_S) = \ldots = 0$, logo, (f_{n_k}) não converge no ponto x_S.

27. Para espaços métricos M é válida a recíproca do Teorema de Weierstrass: se tôda função real contínua $f : M \to R$ é limitada, então M é compacto. Com efeito, se M não fôsse compacto, conteria um subconjunto infinito sem ponto de acumulação. Seja $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ um subconjunto enumerável dêsse conjunto infinito. Em particular, nenhum ponto de S é ponto de acumulação de S. Assim, para cada $x_n \in S$, existe uma bola fechada $D(x_n; r_n)$, que não contém outro ponto de S além de x_n. Ponhamos $s_n = r_n/2$. Afirmamos que as bolas fechadas $D(x_n; s_n)$ são duas a duas disjuntas. De fato, dados $m \neq n$, suponhamos, para fixar as idéias que $s_m \leq s_n$. Se existisse um ponto $z \in D(x_m; s_m) \cap D(x_n; s_n)$, teríamos $d(x_m, z) \leq s_n$ e $d(x_n, z) \leq s_n$, donde $d(x_m, x_n) \leq 2s_n = r_n$ e portanto $x_m \in D(x_n; r_n)$, um absurdo. Definiremos agora uma função $f : M \to R$, pondo $f(x) = 0$ se x não pertence a nenhuma das bolas $D(x_n; s_n)$ e $f(x) = \frac{n}{s_n} [s_n - d(x, x_n)]$ se $x \in D(x_n, s_n)$. Verifica-se sem dificuldade que f é uma função contínua, ilimitada em M [pois $f(x_n) = = n$]. Como a métrica $d : M \times M \to R$ é uma função contínua e como $M \times M$ é completo ou limitado se, e sòmente se, M o fôr, segue-se que se tôdas as métricas compatíveis com a topologia de M são limitadas então M é compacto. Note-se que existem espaços topológicos não-compactos e não-metrizáveis, nos quais tôda função real contínua é limitada.

Proposição 13 — *Para que um espaço métrico M seja totalmente limitado, é necessário e suficiente que seu completamento $\hat{M}$ seja compacto.*

Demonstração: Suponhamos que M seja totalmente limitado. Então, o espaço completo $\hat{M}$, sendo o fecho de um conjunto isométrico a M, é também totalmente limitado (Prop. 11). Segue-se portanto, da Prop. 12 que $\hat{M}$ é compacto. Recìprocamente, se $\hat{M}$ fôr compacto, será também totalmente limitado e assim também será M, por ser isométrico a um subconjunto de $\hat{M}$.

COROLÁRIO — *Um subconjunto de um espaço métrico completo é totalmente limitado se, e sòmente se, é relativamente compacto.*

Seja $\mathfrak{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma cobertura de um espaço métrico M. Diz-se que um número $\epsilon > 0$ é um *número de Lebesgue* da cobertura $\mathfrak{C}$ quando a seguinte condição é satisfeita: para todo subconjunto $S \subset M$ com $\delta(S) < \epsilon$, existe um $\lambda \in L$ tal que $S \subset C_\lambda$.

Evidentemente, se $\epsilon > 0$ é um número de Lebesgue da cobertura $\mathfrak{C}$, todo número real positivo menor do que ϵ ainda será um número de Lebesgue de $\mathfrak{C}$.

EXEMPLO

28. Uma cobertura de um espaço métrico, mesmo finita, não possui necessàriamente um número de Lebesgue. Por exemplo, seja $R^2 = A \cup B$ a cobertura do plano R^2 por meio dos abertos $A = \{(x, y) \in R^2; x \neq 0\}$ e $B = \{(x, y) \in R^2; xy \neq 1\}$. ($A$ é o complementar do eixo dos y e B é o complementar da hipérbole $y = 1/x$.) Dado qualquer $\epsilon > 0$, podemos tomar x tal que $0 < x < \epsilon$. Então, os pontos $a = (0, 1/x)$ e $b = (x, 1/x)$ são tais que $d(a, b) = x < \epsilon$, mas $a \notin A$ e $b \notin B$, logo, não existe conjunto algum da cobertura que contenha ambos os pontos. Assim, nenhum $\epsilon > 0$ é número de Lebesgue da cobertura $M = A \cup B$.

PROPOSIÇÃO 14 — *Tôda cobertura aberta $\mathfrak{C} = (U_\lambda)_{\lambda \in L}$ de um espaço métrico compacto M possui um número de Lebesgue.*

Demonstração: Se supusermos que nenhum número real positivo é um número de Lebesgue para a cobertura $\mathfrak{C}$ obteremos, para cada $n \in N$, um conjunto S_n tal que $\delta(S_n) < 1/n$ mas nenhum U_λ contém S_n. Escolhamos, para cada n, um ponto $x_n \in S_n$. Passando a uma subseqüência, se necessário, podemos supor que $x_n \to x \in M$. Existe algum $\lambda \in L$ tal que $x \in U_\lambda$. Existe também $\epsilon > 0$ tal que $B(x; \epsilon) \subset U_\lambda$. Tomemos n tão grande que $1/n < \epsilon/2$ e $d(x, x_n) < \epsilon/2$. Então, para todo $y \in S_n$, teremos

$$d(y, x) \leq d(y, x_n) + d(x_n, x) < \frac{1}{n} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Segue-se que $S_n \subset B(x; \epsilon)$, donde $S_n \subset U_\lambda$, uma contradição.

Proposição 15 — *Sejam M, N espaços métricos. Se M é compacto, então tôda aplicação contínua $f : M \to N$ é uniformemente contínua.*

Primeira demonstração: Dado $\epsilon > 0$, em virtude da continuidade de f, todo ponto $x \in M$ está contido num aberto U_x tal que $u \in U_x$ implica $d(f(u), f(x)) < \epsilon/2$. Pela desigualdade triangular conclui-se que $u, v \in U_x$ implica $d(f(u), f(v)) < \epsilon$. Seja $\delta > 0$ um número de Lebesgue da cobertura $(U_x)_{x \in M}$. Dados $u, v \in M$, com $d(u, v) < \delta$, existe $x \in M$ tal que $u, v \in U_x$ e, por conseguinte, $d(f(u), f(v)) < \epsilon$, o que estabelece a continuidade uniforme de f.

Segunda demonstração: Suponhamos que f não seja uniformemente contínua. Existe então $\epsilon > 0$ tal que, para todo $n = 1,2, \ldots$ se podem encontrar $x_n, y_n \in M$ com $d(x_n, y_n) < 1/n$ e $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$. Passando a uma subseqüência convergente e mudando de notação, se necessário, podemos supor que $x_n \to x \in M$. Então, $y_n \to y$ também. Em virtude da continuidade de f, vem $\lim d(f(x_n), f(y_n)) = d(f(x), f(x)) = 0$, contradizendo que $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$ para todo n.

Resulta da proposição acima que se M e N são espaços métricos compactos, então todo homeomorfismo $h : M \to N$, de M sôbre N, é um homeomorfismo uniforme. (*Cf.* Cap. V.) Em particular, duas métricas equivalentes num espaço métrico compacto M são sempre uniformemente equivalentes. Os resultados do Cap. V sôbre o espaço de aplicações $\mathfrak{F}(X; M)$ do conjunto X no espaço métrico M se tornam bastante simples no caso em que M é compacto. Em primeiro lugar, $\mathfrak{F}(X; M) = \mathfrak{B}(X; M)$ pois tôda métrica em M é limitada. Além disso, a topologia de $\mathfrak{B}(X; M)$ não depende da métrica particular tomada em M, mas apenas da topologia de M.

§ 5. Espaços Localmente Compactos

Um espaço topológico X diz-se *localmente compacto* quando todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança compacta.

EXEMPLOS

29. Todo espaço compacto é localmente compacto pois o espaço inteiro é uma vizinhança compacta de qualquer dos seus pontos. Todo espaço discreto é localmente compacto pois cada um dos seus pontos é uma vizinhança compacta de si próprio. O espaço euclidiano R^n, e em particular

a reta R, é localmente compacto pois tôda bola fechada é uma vizinhança compacta do seu centro. Resulta daí (*cf.* Ex. 23) que todo espaço vetorial normado de dimensão finita é localmente compacto.

30. O conjunto Q dos números racionais não é um espaço localmente compacto. Com efeito, dado $x \in Q$, qualquer vizinhança V de x em Q contém um intervalo racional, no qual certamente existe uma seqüência de números racionais convergindo em R para um limite irracional, isto é, uma seqüência sem subseqüência convergente em Q. De maneira análoga se vê que o conjunto dos números irracionais também não é um espaço localmente compacto.

31. O espaço de Hilbert H (vide Ex. 11, Cap. VI) não é localmente compacto. Com efeito, dado $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots) \in H$, tôda vizinhança V de x em H contém uma bola fechada $D(x; \epsilon)$. Para mostrar que nenhuma tal V é compacta, basta exibir uma seqüência (y_n) em $D(x; \epsilon)$ sem subseqüência convergente. Definirmos $y_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n + \epsilon, x_{n+1}, \ldots)$ e observamos que $y_n - x = \epsilon$, donde $y_n \in D(x; \epsilon)$ para todo n. Além disso, $|y_m - y_n| = \epsilon\sqrt{2}$ para quaisquer $m \neq n$. Logo, (y_n) não possui subseqüência de Cauchy e portanto nenhuma de suas subseqüências converge.

32. Para que um espaço métrico M seja localmente compacto, é necessário e suficiente que todo ponto $x \in M$ seja centro se uma bola fechada compacta. A suficiência é óbvia. Quanto à necessidade, se M é localmente compacto, dado $x \in M$ qualquer, existe uma vizinhança compacta $V \ni x$. Da definição de vizinhança segue-se que existe uma bola fechada $D(x; \epsilon) \subset V$. Sendo um subconjunto fechado do compacto V, $D(x; \epsilon)$ é compacta. Equivalentemente, M é localmente compacto se, e sòmente se, todo ponto $x \in M$ é centro de uma bola aberta B cujo fecho $\overline{B}$ é compacto.

33. A fim de que um espaço vetorial normado E seja localmente compacto é (necessário, pelo Ex. 32, e) suficiente que pelo menos uma bola fechada $D(x; \epsilon)$ seja compacta. Com efeito, basta observar que duas bolas quaisquer $D(x; \epsilon)$ e $D(y; \eta)$ em E são sempre homeomorfas. Mais precisamente, o homeomorfismo $\varphi : E \to E$, definido por $\varphi(z) = y + \frac{\eta}{\epsilon}(z - x)$ transforma $D(x; \epsilon)$ em $D(y; \eta)$. Segue-se daí que, se um espaço vetorial normado E (como H, por exemplo) não fôr localmente compacto, todo subconjunto compacto de E tem interior vazio.

34. Para demonstrar que o espaço $C = \mathfrak{C}([0, 1], R)$ das funções contínuas $f : [0, 1] \to R$ não é localmente compacto, basta mostrar que a bola fechada de raio 1 e centro na origem (função idênticamente nula) não é

compacta. Para isso, obteremos uma seqüência de funções contínuas $f_n : [0, 1] \to R$ com $|f_n| = 1$ para todo n e $|f_m - f_n| = 1$ se $m \neq n$. Poremos

$f_n(x) = 1$, para $x \geq 1/n$
$f_n(x) = 0$, se $x \leq 1/(n + 1)$
f_n linear no intervalo $[1/(n + 1), 1/n]$ (vide figura).

35. Os Exs. 31 e 34 ilustram um teorema, devido a *F*. Riesz, segundo o qual todo espaço vetorial normado localmente compacto tem dimensão finita. Os espaços H e C daqueles exemplos não são localmente compactos porque têm dimensão infinita. (Para a demonstração do Teorema de Riesz, ver [Dieudonné.])

36. Para que um espaço de Hausdorff X seja localmee contmpacto é necessário e suficiente que todo ponto $x \in X$ esteja contido num aberto A cujo fecho $\bar{A}$ é compacto. Em outras palavras: que X admita uma cobertura por meio de abertos relativamente compactos. Com efeito, se X é localmente compacto de Hausdorff, então todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhaça compacta V a qual, por ser X de Hausdorff, é fechada em X. Pela definição de vizinhança existe um aberto A em X tal que $x \in A \subset V$. Como V é fechado, temos $\bar{A} \subset V$ e portanto $\bar{A}$ é compacto, por ser um subconjunto fechado do compacto V. A recíproca é óbvia, mesmo que X não seja um espaço de Hausdorff.

Observação — De longe, os espaços topológicos mais interessantes são os espaços de Hausdorff. Certos autores impõem na definição de espaço normal, de espaço compacto etc., a condição de que o axioma de Hausdorff seja válido. Não o fizemos aqui, especialmente no caso de espaços compactos, porque muitos dos teoremas gerais que demonstramos (Cap. V, § 2) eram válidos sem essa exigência e, além disso, para os espaços métricos, caso que nos interessa mais de perto, aquêle axioma é satisfeito automàticamente. O mesmo não se dá com os espaços localmente compactos. Como vimos no Ex. 36 e veremos agora nas proposições seguintes, mesmo as propriedades mais elementares dos espaços localmente compactos requerem o axioma de Hausdorff para serem demonstradas.

Lembramos que, num espaço topológico X, uma coleção $\mathfrak{S}$ de vizinhanças de um ponto $x \in X$ chama-se um *sistema fundamental de vizinhanças*

de x quando, para tôda vizinhança V de x em X, existe uma vizinhança $U \in \mathfrak{S}$ tal que $x \in U \subset V$.

Intuitivamente, um sistema fundamental de vizinhanças de x deve conter vizinhanças "arbitràriamente pequenas" de x.

Proposição 16 — *Num espaço de Hausdorff localmente compacto X, as vizinhanças compactas de cada ponto constituem um sistema fundamental.*

Demonstração: Seja $x \in X$. Consideremos uma vizinhança arbitrária $U \ni x$ e mostremos como obter uma vizinhança compacta de x, contida em U. Sendo X localmente compacto, x possui uma vizinhança compacta V. Como $U \cap V$ é uma vizinhança de x, existe um aberto A em X com $x \in A \subset U \cap V$. O ponto x é um subconjunto fechado do espaço de Hausdorff X. A situação é pois a do Corolário da Prop. 9: um subconjunto fechado x contido num aberto A, tudo dentro do espaço compacto V. Logo, existe um aberto B tal que $x \in B$ e $\overline{B} \subset A$. Em particular, $\overline{B} \subset U$. Aqui, B é aberto em V. Mas, como $B \subset A$, B é aberto em A e, sendo A aberto em X, B é aberto em X. Também o fecho $\overline{B}$ é tomado em V. Mas, como X é um espaço de Hausdorff, o compacto V é fechado em X e portanto $\overline{B}$ coincide com o fecho de B em X. Assim, $\overline{B}$ é uma vizinhança de x, a qual está contida em U, e é compacta por ser um subconjunto fechado do espaço compacto V.

A proposição anterior pode ser estendida do seguinte modo.

Uma *vizinhança* de um subconjunto S de um espaço topológico X é um conjunto V tal que $S \subset \text{int. } V$. Em outras palavras, existe um aberto A com $S \subset A \subset V$.

Anàlogamente, um *sistema fundamental de vizinhanças* do conjunto S é uma coleção $\mathfrak{S}$ de vizinhanças de S tal que, dada qualquer vizinhança V de S, existe $U \in \mathfrak{S}$ com $S \subset U \subset V$.

Proposição 17 — *Num espaço de Hausdorff localmente compacto, as vizinhanças compactas de um subconjunto compacto K constituem um sistema fundamental de vizinhanças de K.*

Demonstração: Seja $V \supset K$ uma vizinhança arbitrária de K. Em virtude da Prop. 16 podemos obter, para cada ponto $x \in K$, uma vizinhança

aberta A_x, tal que $\bar{A}_x$ é compacto e $\bar{A}_x \subset V$. Da cobertura $K \subset \bigcup A_x$, podemos extrair uma subcobertura finita $K \subset A_{x_1} \cup \ldots \cup A_{x_m}$. Pomos $W = \bar{A}_{x_1} \cup \ldots \cup \bar{A}_{x_m}$. Evidentemente, W é uma vizinhança compacta de K, com $K \subset W \subset V$.

Um subconjunto S de um espaço topológico X diz-se *localmente fechado* em X quando todo ponto $x \in S$ possui uma vizinhança U (em X) tal que $U \cap S$ é fechado em U. Isto significa que existe um subconjunto fechado F em X, tal que $U \cap F = U \cap S$.

Mostraremos agora que S é localmente fechado em X se, e sòmente se, é um subconjunto fechado de um aberto $A \supset S$, isto é, se, e sòmente se, $S = A \cap F$ é a interseção de um aberto com um fechado.

Na definição acima, a vizinhança U pode sempre ser tomada aberta em X, pois existe um aberto A tal que $x \in A \subset U$, donde $A \cap S = = A \cap U \cap S = A \cap U \cap F = A \cap F$, e portanto $A \cap S$ é fechado em A.

Segue-se que *S é localmente fechado em X se, e sòmente se, S é um subconjunto fechado de um conjunto A, aberto em X.*

Com efeito, se S é localmente fechado, cada ponto $x \in S$ possui uma vizinhança aberta A_x, tal que $A_x \cap S$ é fechado em A_x, isto é, $A_x - (A_x \cap S)$ é aberto (em A_x ou em X, tanto faz). Seja $A = \bigcup_{x \in S} A_x$. A é aberto em X e contém S. Afirmamos que S é fechado em A. De fato, dado $y \in A - S$, existe $x \in S$ tal que $y \in A_x - (A_x \cap S)$. Como $A_x \cap S$ é fechado em A_x, y possui uma vizinhança V em A_x (a qual é também uma vizinhança de y em A) que não contém pontos de $A_x \cap S$, isto é, $V \cap S = \varnothing$. A recíproca é óbvia.

EXEMPLOS

37. Todo subconjunto fechado $F \subset X$ é localmente fechado, a vizinhança de cada ponto $x \in F$ sendo tomada como o espaço inteiro X. Todo subconjunto aberto $A \subset X$ também é localmente fechado: para cada $x \in A$, A é uma vizinhança de x e $A \cap A$ é fechado em A. Um intervalo semi-aberto $[a, b)$ é um subconjunto localmente fechado da reta. Para os pontos $x \in (a, b)$, o próprio $[a, b)$ é uma vizinhança de x tal que $[a, b) \cap [a, b)$ é fechado em $[a, b)$. Para $x = a$, tomamos $V =$ qualquer vizinhança de x que não contenha pontos à direita de b. Então, $V \cap [a, b) = V \cap [a, b]$ é fechado em V.

38. Com base no segmento $[1/(n + 1), 1/n]$ do eixo das abscissas, e com altura 1, construamos um triângulo isósceles. Seja S a reunião dos

lados oblíquos dêsses triângulos, para $n = 1, 2, 3, \ldots$ S é o gráfico de uma função contínua definida em $(0, 1]$ e portanto é um subconjunto fechado de $(0, 1] \times R$. Segue-se que S é localmente fechado no plano.

Proposição 18 — *Num espaço de Hausdorff localmente compacto X, todo subconjunto localmente fechado S é localmente compacto. Recìprocamente, em qualquer espaço de Hausdorff X, todo subconjunto localmente compacto S é localmente fechado em X.*

Demonstração: Seja S localmente fechado em X. Todo ponto $x \in S$ possui uma vizinhança U em X tal que $U \cap S = U \cap F$, onde F é fechado em X. Pela Prop. 16, x possui uma vizinhança compacta V em X tal que $V \subset U$, isto é, $V \cap U = V$. Então, $V \cap S$ é uma vizinhança de x em S (*cf.* Prop. 14, Cap. III) e, como $V \cap S = V \cap U \cap S = V \cap U \cap F =$ $= V \cap F =$ subconjunto fechado do compacto V, segue-se que $V \cap S$ é compacta e portanto S é localmente compacto. Recìprocamente, seja S um subespaço localmente compacto do espaço de Hausdorff X. Todo ponto $x \in S$ possui uma vizinhança compacta $V \cap S$, onde V é uma vizinhaça de x em X. Como X é um espaço de Hausdorff, o subconjunto compacto $V \cap S$ deve ser fechado em X. Em particular, $V \cap S$ é fechado em V e, por conseguinte, S é localmente fechado.

Corolário 1 — *Os subconjuntos fechados, bem como os subconjuntos abertos de um espaço localmente compacto de Hausdorff, são localmente compactos.*

Corolário 2 — *Todo subconjunto localmente compacto S, denso num espaço de Hausdorff X, é aberto em X.*

Com efeito, S é localmente fechado em X. Logo, existe um aberto A em X tal que $S \subset A$ e S é fechado em A. Mas S, sendo denso em X, é também denso no aberto A. Logo, $S = A$.

Corolário 3 — *Todo espaço métrico localmente compacto M é um subconjunto aberto do seu completamento $\hat{M}$.*

Corolário 4 — *Todo espaço métrico localmente compacto é homeomorfo a um espaço métrico completo. (Ou seja, sua topologia pode ser definida por uma métrica em relação à qual êle é completo.)*

O Corol. 4 segue-se do Corol. 3 e do Ex. 8, Cap. VI. Uma conseqüência do Corol. 4 é que todo espaço métrico localmente compacto é um espaço de Baire. Mais geralmente, temos a proposição seguinte.

PROPOSIÇÃO 19 — *Todo espaço de Hausdorff localmente compacto é um espaço de Baire.*

Demonstração: Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto. Dada uma família enumerável (A_n) de abertos densos em X, devemos provar que $S = \bigcap A_n$ é um subconjunto denso de X, isto é, que um aberto não-vazio arbitrário U_1 contém algum ponto de S. Em virtude da Prop. 16, podemos supor que $\overline{U}_1$ é compacto. Como A_1 é denso em X, $U_1 \cap A_1$ é um subconjunto aberto não-vazio de X. Ainda pela Prop. 16, existe um aberto não-vazio U_2, com $\overline{U}_2 \subset U_1 \cap A_1$. Como A_2 é denso em X, $U_2 \cap A_2$ é aberto e não-vazio. Logo, existe um aberto não-vazio U_3, com $\overline{U}_3 \subset U_2 \cap A_2$ e assim sucessivamente. Obtemos uma seqüência $\overline{U}_1 \supset \overline{U}_2 \supset \overline{U}_3 \supset \ldots$ com $\overline{U}_{n+1} \subset U_n \cap A_n$, a qual tem evidentemente a propriedade da interseção finita. Como $\overline{U}_1$ é compacto, existe um ponto $x \in \bigcap \overline{U}_n$. Para todo n, portanto, $x \in \overline{U}_{n+1} \subset U_n \cap A_n$. Em particular, $x \in A_n$ para todo n, isto é, $x \in S$. Também $x \in U_1$, o que demonstra a proposição.

PROPOSIÇÃO 20 — *O produto cartesiano $X \times Y$ é localmente compacto se, e sòmente se, cada um dos fatôres X, Y é localmente compacto.*

Demonstração: Sejam X e Y localmente compactos. Dado um ponto $(x, y) \in X \times Y$, x possui uma vizinhança compacta U em X, e y possui uma vizinhança compacta V em Y. Então, $U \times V$ é uma vizinhança de (x, y) em $X \times Y$, a qual é compacta, pela Prop. 8. Recìprocamente, se $X \times Y$ fôr localmente compacto, provemos, por exemplo, que X é localmente compacto. Dado $x \in X$, tomemos $y \in Y$ qualquer, e uma vizinhaça compacta V do ponto (x, y) em $X \times Y$. Como a projeção $p_1 : X \times Y \to X$ é uma aplicação contínua, $p_1(V)$ é um subconjunto compacto de X. E como p_1 é aberta, $p_1(V)$ é uma vizinhança de x. Logo, X é localmente compacto e do mesmo modo se prova que Y é.

COROLÁRIO — *O produto cartesiano $X_1 \times \ldots \times X_n$ é localmente compacto se, e sòmente se, cada um dos fatôres $X_1, \ldots, X_n$ é localmente compacto.*

EXEMPLO

39. O conjunto Q^n dos pontos do espaço euclidiano R^n cujas coordenadas são números racionais não é localmente compacto pois é o produto cartesiano de n cópias de Q, o qual não é localmente compacto.

Consideremos agora o importante conceito de "compactificação" de um espaço topológico.

Intuitivamente, uma compactificação de um espaço topológico X é um espaço compacto Y que contém X. Então, o fecho $\bar{X}$, de X em Y, é também compacto e portanto não há necessidade de considerar os pontos de Y fora de X. Em outras palavras, podemos supor que X é denso em Y.

Mais precisamente, uma *compactificação* do espaço topológico X é uma aplicação contínua $\varphi: X \to Y$ tal que Y é compacto, $\varphi(X)$ é denso em Y e φ é um homeomorfismo de X sôbre $\varphi(X)$.

EXEMPLOS

40. Uma compactificação importante é fornecida pela projeção estereográfica (Cap. II, Ex. 10). Sua inversa $\varphi: R^n \to S^n$ é um homeomorfismo de R^n sôbre $S^n - p$. (p = pólo norte da esfera S^n). Assim, $\varphi : R^n \to S^n$ é uma compactificação do espaço euclidiano. Trata-se de uma compactificação especial, chamada "compactificação de Alexandrov", porque o espaço compacto S^n é obtido acrescentando-se a (uma cópia homeomorfa de) R^n apenas um ponto, que freqüentemente se chama o *ponto no infinito.*

41. Outra compactificação do espaço R^n pode ser obtida com a bola unitária $D^n = \{x \in R^n; x \leq 1\}$. Seja $\varphi: R^n \to D^n$ o homeomorfismo de R^n sôbre a bola aberta $B^n = \{x \in R^n; |x| < 1\}$, definido por $\varphi(x) = x/(1 + |x|)$. Como o fecho de $B^n = \varphi(R^n)$ é tôda a bola fechada D^n, φ é uma compactificação de R^n. Neste caso, $D^n - \varphi(R^n) = S^{n-1} = \{x \in R^n; |x| = 1\}$ = esfera unitária de dimensão $n - 1$, logo, φ não é uma compactificação de Alexandrov.

42. Em Geometria Projetiva, usa-se uma compactificação de R^n que consiste em lhe acrescentar o "hiperplano no infinito", obtendo assim o espaço projetivo P^n. Do nosso ponto de vista, (vide definição de P^n no Exerc. 15 do Cap. I) essa compactificação pode ser descrita como a aplicação composta

$$R^n \xrightarrow{\alpha} B^n \xrightarrow{\beta} H^n \xrightarrow{\pi'} P^n$$

$\varphi = \pi' \circ \beta \circ \alpha: R^n \to P^n$, onde $\alpha(x) = x/(1 + |x|)$ é um homeomorfismo de R^n sôbre a bola unitária aberta B^n, β é o homeomorfismo de B^n sôbre o hemisfério norte aberto $H^n = \{x = (x^1, \ldots, x^{n+1}) \in R^{n+1}; |x| = 1, x^{n+1} > 0\}$, definido por $\beta(y) = \left(y, \sqrt{1 - |y|^2}\right)$, e $\pi' : H^n \to P^n$ é a restrição a H^n da projeção canônica $\pi : S^n \to P^n$. Note-se que π' é um homeomorfismo

sôbre $P^n - \pi(S^{n-1})$. Assim, φ é um homeomorfismo de R^n sôbre o complementar do "hiperplano" $\pi(S^{n-1})$ em P^n. (Estamos indicando com S^{n-1} o equador de S^n, isto é, $S^{n-1} = \{x \in S^n; x^{n+1} = 0\}$.)

Observação — A noção de compactificação é análoga à de completamento mas nenhuma das duas inclui a outra como caso particular. Chamamos a atenção, em especial, para o fato de que, se X fôr um espaço métrico, então tôda compactificação de X que seja também um espaço métrico (isto não acontece sempre) é necessàriamente completo, por ser compacto, mas não é em geral um completamento de X porque o homeomorfismo $\varphi : X \to \varphi(X)$ pode não ser uma isometria. Assim é que um espaço métrico completo, como é R^n, possui a compactificação S^n (e muitas outras) mas não possui completamento diferente de si próprio. A esfera S^n pode ser considerada como completamento do espaço métrico (R^n, ρ) onde $\rho(x, y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|$, $\varphi : R^n \to S^n$ sendo a inversa da projeção estereográfica. Do mesmo modo as métricas ρ' e ρ'', induzidas em R^n pelos homeomorfismos $\alpha : R^n \to B^n$ e $\pi' \circ \beta \circ \alpha : R^n \to P^n - \pi(S^{n-1})$ respectivamente, são equivalentes à métrica usual e os completamentos de (R^n, ρ') e (R^n, ρ'') são respectivamente o disco unitário D^n e o espaço projetivo P^n.

Interessa-nos aqui a compactificação por meio de um ponto, a qual se relaciona com os espaços localmente compactos.

Uma *compactificação de Alexandrov* de um espaço topológico X é uma aplicação $\varphi : X \to X^*$ tal que:

1.º) X^* é um espaço compacto de Hausdorff;

2.º) φ é um homeomorfismo de X sôbre $\varphi(X)$;

3.º) $X^* = \varphi(X) \cup \omega$, $\omega \notin \varphi(X)$.

O ponto ω tal que $X^* - \varphi(X) = \{\omega\}$, chama-se o *ponto no infinito* da compactificação $\varphi : X \to X^*$.

Muitas vêzes, por simplicidade, diz-se que X^* é a compactificação de Alexandrov de X, deixando subentendida a aplicação φ.

Observação — O complementar de um ponto num espaço topológico, ou é fechado ou é denso (conforme o ponto em questão seja isolado ou não). Como um subconjunto fechado de um espaço compacto é compacto, segue-se que, ou $\varphi(X)$ é denso em X^* ou é compacto. Por isso, ao definir a compactificação de Alexandrov, não impusemos a condição de que $\varphi(X)$ fôsse denso em X^*. Se tal condição não fôr satisfeita, tem-se o caso trivial em que X já é compacto e X^* consiste de um espaço homeomorfo a X e mais um ponto isolado.

Recìprocamente, se X fôr compacto, tôda compactificação de Alexandrov $\varphi : X \to X^*$ é tal que $\varphi(X)$ é um subconjunto compacto (e portanto fechado) do espaço de Hausdorff X^*. Logo, $\omega = X^* - \varphi(X)$ é um ponto isolado e X^* é a soma topológica de um conjunto $\varphi(X)$, homeomorfo a X, mais um ponto isolado.

PROPOSIÇÃO 21 — *Todo espaço de Hausdorff localmente compacto possui uma compactificação de Alexandrov.*

Demonstração — Consideremos um objeto qualquer ω que não pertença a X e ponhamos $X^* = X \cup \{\omega\}$. Definamos $\varphi : X \to X^*$ como a aplicação de inclusão $\varphi(x) = x$. Para introduzir uma topologia em X^*, chamaremos de abertos em X^* os subconjuntos abertos de X e mais os conjuntos da forma $A \cup \{\omega\}$ onde A é um aberto em X tal que $X - A$ é compacto. Verifiquemos os axiomas. É óbvio que $\varnothing$ e X^* são abertos. Em seguida, sejam A, B, C, D abertos em X, com $X - C$ e $X - D$ compactos. Então, $X - (C \cap D) = (X - C) \cup (X - D)$ é compacto. A interseção de dois abertos em X^* tem uma das formas $A \cap B$, $A \cap (C \cup \{\omega\}) = A \cap C$, ou $(C \cup \{\omega\}) \cap (D \cup \{\omega\}) = (C \cap D) \cup \{\omega\}$. De qualquer forma, essa interseção é ainda um aberto em X^*. Finalmente, sejam (A_λ) e (B_μ) famílias de abertos em X, onde cada $X - B_\mu$ é compacto. Então, $A = \bigcup A_\lambda$ e $B = \bigcup B_\mu$ são abertos em X e $X - B = \bigcap (X - B_\mu)$ sendo uma interseção de fechados, é um subconjunto fechado de X, contido em qualquer dos compactos $X - B_\mu$. Logo, $X - B$ é compacto e, anàlogamente, $X - (A \cup B)$ é compacto. Uma reunião de abertos em X^* tem uma das formas $\bigcup A_\lambda = A$, $\bigcup (B_\mu \cup \{\omega\}) = B \cup \{\omega\}$ ou $\bigcup_{\lambda, \mu} (A_\lambda \cup B_\mu \cup \{\omega\}) = (A \cup B) \cup \{\omega\}$. De qualquer modo, tal reunião é um subconjunto aberto de X^*.

Se $A^* \subset X^*$ é aberto, então $A^* \cap X$ é aberto em X. [Basta notar que, dado $A \subset X$, $(A \cup \{\omega\}) \cap X = A$.] Isto significa que $\varphi : X \to X^*$ é contínua. Além disso, todo conjunto $A \subset X$, aberto em X, é aberto em X^*. Logo, φ é uma aplicação aberta e, por conseguinte, um homeomorfismo de X sôbre $\varphi(X)$.

Mostremos agora que X^* é compacto. Dada uma cobertura aberta (C_λ) de X^*, o ponto no infinito ω pertence a um C_{λ_0}, o qual deve ter a forma $C_{\lambda_0} = A \cup \{\omega\}$, onde $A \subset X$ é aberto e $X - A$ é compacto. Os demais conjuntos C_λ, $\lambda \neq \lambda_0$, constituem uma cobertura aberta de $X - A$ da qual se pode extrair uma subcobertura finita $X - A, \subset C_{\lambda_1} \cup \ldots \cup C_{\lambda_n}$. Logo, $X^* = C_{\lambda_0} \cup C_{\lambda_1} \cup \ldots \cup C_{\lambda_n}$, provando a compacidade de X^*.

Finalmente, verifiquemos que X^* é um espaço de Hausdorff. Dois pontos distintos quaisquer x, y pertencentes ao espaço de Hausdorff X possuem vizinhanças abertas disjuntas $A, B \subset X$, as quais são abertas tam-

bém em X^*. Por outro lado, dados $x \in X$ e ω, podemos obter um aberto $A \subset X$ com $x \in A$ e $\overline{A}$ compacto, em virtude da compacidade local do espaço de Hausdorff X. Então, $(X - \overline{A}) \cup \{\omega\}$ é uma vizinhança aberta de ω, disjunta da vizinhança $A \ni x$, o que conclui a demonstração.

Observação — Sòmente um espaço de Hausdorff localmente compacto X pode possuir uma compactificação de Alexandrov $\varphi : X \to X^*$. Com efeito, sendo X^* um espaço de Hausdorff, o ponto no infinito ω é um subconjunto fechado e portanto $\varphi(X) = X^* - \{\omega\}$ é um subconjunto aberto do espaço de Hausdorff (localmente) compacto X^*. Pelo Corolário da Prop. 18, $\varphi(X)$ é um espaço de Hausdorff localmente compacto, e portanto X também é.

A proposição abaixo demonstra a unicidade da compactificação de Alexandrov.

Proposição 22 — *Sejam $\varphi : X \to X^*$ e $\psi : X \to X^\#$ compactificações de Alexandrov do mesmo espaço (de Hausdorff, localmente compacto) X, com $X^* = X \cup \{\omega^*\}$ e $X^\# = X \cup \{\omega^\#\}$. Existe um homeomorfismo $h : X^* \to X^\#$ tal que $h \circ \varphi = \psi$ e $h(\omega^*) = \omega^\#$.*

Demonstração: A aplicação $h : X^* \to X^\#$ já está definida no enunciado. Tem-se $h(\omega^*) = \omega^\#$ e, em $\varphi(X)$, h reduz-se ao homeomorfismo $h = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(X) \to \psi(X)$. Mostremos que h é contínua no ponto ω^*. Para isso, seja B uma vizinhança aberta de $\omega^\#$ em $X^\#$. Então, $X^\# - B$ é fechado em $X^\#$ e portanto um compacto, contido em $\psi(X)$. Logo, $X^\# - B = h(K)$, onde $K \subset \varphi(X)$ é compacto. Como X^* é de Hausdorff, K é fechado em X^*, donde $K = X^* - A$, A uma vizinhança aberta de ω^*. Segue-se que $X^\# - B = h(K) = h(X^* - A) = X^\# - h(A)$, a última igualdade sendo válida porque h é uma correspondência biunívoca entre X^* e $X^\#$. Logo, $B = h(A)$, o que prova a continuidade de h no ponto ω^*. Assim, h é uma aplicação contínua e biunívoca do espaço compacto X^* no espaço de Hausdorff $X^\#$. Pela Prop. 5, h é um homeomorfismo de X^* sôbre $X^\#$.

Corolário — *Sejam $\varphi : X \to X^*$ e $\psi : Y \to Y^*$ compactificações de Alexandrov. Todo homeomorfismo $h : X \to Y$ estende-se a um homeomorfismo $h^* : X^* \to Y^*$, que transforma o ponto no infinito de X^* no ponto no infinito de Y^*.*

Quando dizemos "estende-se" estamos imaginando $X \subset X^*$ e $Y \subset Y^*$. A rigor, portanto, queremos dizer que $h^* \circ \varphi = \psi \circ h$.

Para demonstrar o Corolário, basta notar que, sendo h um homeomorfismo, $\psi \circ h : X \to Y^*$ e $\varphi : X \to X^*$ são ambas compactificações de Alexandrov do mesmo espaço X. A existência de h^* segue-se então da Prop. 22. Em resumo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\psi \\ X^* & \xrightarrow{h^*} & Y^* \end{array}$$

Para que um espaço topológico X possua uma compactificação de Alexandrov $\varphi : X \to X^*$, é necessário e suficiente que X seja um espaço de Hausdorff localmente compacto. A compactificação de Alexandrov é única, a menos de um homeomorfismo: tem-se, essencialmente, $X^* = X \cup \{\omega\}$, as vizinhanças do ponto no infinito ω sendo os conjuntos da forma $A \cup \{\omega\}$, onde $A = X - K$ é o complementar de um subconjunto compacto de X. Se X já é um espaço de Hausdorff compacto, X^* é a soma topológica de X com um ponto isolado $\omega \notin X$.

EXEMPLOS

43. A aplicação $\varphi : R^n \to S^n$, inversa da projeção estereográfica, é a (essencialmente única) compactificação de Alexandrov do espaço euclidiano R^n. Em particular, o círculo S^1 fica caracterizado como a compactificação de Alexandrov da reta.

44. Seja $X = S^2 - \{p, q\}$ o espaço obtido retirando-se da esfera o pólo norte p e o pólo sul q. Seja $X^* \subset R^3$ a superfície gerada pela rotação, em tôrno do eixo dos z, do círculo de raio 1/2 e centro no ponto (1/2, 0) do plano xz. (Círculo vertical de raio 1/2, tangente ao eixo dos z na origem de R^3.) Seja $\varphi : X \to X^*$ a aplicação que projeta cada ponto $a \in S^2 - \{p, q\}$ no primeiro ponto em que a vertical passando por a corta a superfície X^*. Vê-se, sem dificuldade, que φ é um homeomorfismo de X sôbre $X^* - \{0\}$. Logo, X^* (uma esfera com 2 pontos antípodas identificados) é a compactificação de Alexandrov de $S^2 - \{p, q\}$.

z
p
a
φ(a)
x
q

Um espaço de Hausdorff localmente compacto diz-se *enumerável no infinito* quando, em sua compactificação de Alexandrov $X^* = X \cup \{\omega\}$,

o ponto no infinito ω possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças.

Proposição 23 — *As seguintes afirmações a respeito de um espaço de Hausdorff localmente compacto são equivalentes:*

1) *X é enumerável no infinito;*

2) *$X = \bigcup L_n$ é uma reunião enumerável de partes compactas;*

3) *$X = \bigcup K_n$ é reunião enumerável de partes compactas tais que, para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$, $K_n \subset$ int. K_{n+1}.*

Demonstração: Provaremos as implicações 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 2) — Substituindo, se necessário, cada vizinhança por seu interior, podemos afirmar que ω possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças abertas $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ cujos complementares $L_n = X^* - B_n$ são portanto compactos. Como todo ponto $x \in X$ é um subconjunto fechado de X^*, dado qualquer $x \in X$, existe um índice n tal que a vizinhança $B_n \ni \omega$ não contém x, isto é, $x \in L_n$. Por conseguinte $X = \bigcup L_n$.

2) $\Rightarrow$ 3) — Pomos $K_1 = L_1$; escolhemos, de acôrdo com a Prop. 18, uma vizinhança compacta de L_2 e a chamamos de K_2; para K_3 escolheremos uma vizinhança compacta de $K_2 \cup L_3$. Mais geralmente, tendo definido $K_1, \ldots, K_n$ com $K_i \subset$ int. K_{i+1} e $L_i \subset K_i$, tomamos uma vizinhança compacta de $K_n \cup L_{n+1}$ e a chamamos de K_{n+1}. Desta última inclusão segue-se que $X = \bigcup K_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

3) $\Rightarrow$ 1) — Em primeiro lugar, mostremos que cada subconjunto compacto $L \subset X$ está contido em algum dos K_n. Com efeito, temos $X = \bigcup$ int. K_n donde, em particular, $L \subset \bigcup$ int. K_n. Desta cobertura aberta de L extraímos uma subcobertura finita $L \subset$ int. $K_{n_1} \cup \ldots \cup$ int. K_{n_r}. Seja $m = \text{máx.}\{n_1, \ldots, n_r\}$. Então, $L \subset$ int. $K_m \subset K_m$. Em seguida, para cada $n \in N$, seja $A_n = X - K_n$. Os conjuntos $A_n \cup \{\omega\}$ constituem um sistema fundamental de vizinhanças de ω em X^*. De fato, dada uma vizinhança de ω, ela contém uma vizinhança aberta, da forma $B \cup \{\omega\}$, com $B = X - L$, L um subconjunto compacto de X. Como vimos, existe m tal que $L \subset K_m$ e portanto $A_m = X - K_m \subset X - L = B$, donde $A_m \cup \{\omega\} \subset B \cup \{\omega\}$, concluindo a demonstração.

EXEMPLOS

45. O espaço euclidiano R^n é enumerável no infinito. Isto pode ser verificado observando-se que R^n é reunião das bolas fechadas de centro

na origem e raio inteiro, ou então notando-se que sua compactificação de Alexandrov S^n sendo um espaço métrico, o ponto infinito de S^n possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças. Mais geralmente, se um espaço métrico localmente compacto M é tal que sua compactificação de Alexandrov $M^* = M \cup \{\omega\}$ é metrizável, então M é enumerável no infinito, pois o ponto ω, como todo ponto de um espaço metrizável, possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças. No capítulo seguinte mostraremos que, recìprocamente, se um espaço métrico localmente compacto M é enumerável no infinito, então sua compactificação de Alexandrov M^* é um espaço metrizável.

46. Um espaço discreto X contendo uma infinidade não-enumerável de pontos fornece um exemplo de espaço metrizável localmente compacto, que não é enumerável no infinito. Com efeito, um subconjunto compacto de X é necessàriamente finito, logo X não pode ser uma reunião enumerável de compactos. Em particular, a compactificação de Alexandrov X^* não é metrizável. No capítulo seguinte, mostraremos que todo espaço métrico localmente compacto e conexo é enumerável no infinito.

47. Sem poder, por enquanto, demonstrar tôdas as afirmações, daremos um exemplo de espaço localmente compacto, conexo e não-enumerável no infinito. Basta considerar o espaço X^* das funções reais $f : R \rightarrow [0, 1]$, com a topologia da convergência simples. (Vide Cap. IV, §6.) Pelo Teorema de Tychonov (vide Cap. IX) êste espaço é compacto. Mas nenhum dos seus pontos possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças. Tomemos um ponto $\omega \in X^*$ e ponhamos $X = X^* - \{\omega\}$. A compactificação de Alexandrov de X é $X^* = X \cup \{\omega\}$ mas o "ponto no infinito" ω não possuindo um sistema fundamental enumerável de vizinhanças, vemos que X não é enumerável no infinito.

48. O conjunto Q dos números racionais mostra que um espaço topológico pode ser uma reunião enumerável de partes compactas sem ser localmente compacto.

§ 6. Exercícios

1. Dada uma cobertura aberta $\mathfrak{C}$ do intervalo $[a, b]$, é possível obter números t_i, com $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, tais que os intervalos $[t_i, t_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, n - 1$, têm todos o mesmo comprimento e cada um dêles está contido em algum conjunto U da cobertura $\mathfrak{C}$.

2. Uma *cadeia* de subconjuntos de um conjunto X é uma coleção $\mathfrak{F}$ de partes de X tais que dados $F, G \in \mathfrak{F}$, ou $F \subset G$ ou $G \subset F$. Tôda cadeia de partes não-vazias de um conjunto X tem a propriedade da interseção finita.

3. Seja X um conjunto bem-ordenado não-enumerável, possuindo último elemento Ω, tal que para cada $a \in X - \{\Omega\}$ o conjunto $\{x \in X; x \leq a\}$ é enumerável. (*Cf.* Exerc. 15, Cap. III.) Consideremos em X a topologia da ordem, na qual uma base de abertos é formada pelos intervalos abertos $(a, b) = \{x \in X; a < x < b\}$. Sabendo que, num conjunto bem ordenado, tôda seqüência decrescente $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq \ldots$ assume apenas um número finito de valôres, mostre que X é compacto.

4. Se, num espaço de Hausdorff X, um ponto x não é isolado então o subespaço $X - \{x\}$ não pode ser compacto. Em particular, no exercício acima, $Y = X - \{\Omega\}$ não é compacto. Entretanto, como todo conjunto infinito contém um subconjunto infinito enumerável e todo subconjunto enumerável de Y é limitado, o argumento do § 1, que demonstra o Teorema de Bolzano-Weierstrass, se aplica para mostrar que todo subconjunto infinito de Y possui um ponto de acumulação.

5. Num espaço topológico *E1*, as seguintes condições são equivalentes:

a) Todo subconjunto infinito tem um ponto de acumulação.

b) Tôda seqüência possui uma subseqüência convergente. Em particular, todo espaço compacto *E1* é seqüencialmente compacto. O espaço Y do Exerc. 4 é *E1* e seqüencialmente compacto mas não é compacto.

6. Se tôda função real contínua $f : X \to R$ é limitada então tôda função real contínua em X atinge seus extremos.

7. Num espaço seqüencialmente compacto, tôda função real contínua é limitada. Para o espaço Y do Exerc. 4, vale o resultado mais preciso seguinte: tôda função contínua $f : Y \to R$ admite uma extensão contínua (única) $\bar{f} : X \to R$. Como X é compacto, isto implica f ser limitada.

8. Num espaço topológico qualquer X, o subespaço S formado pelos pontos x_n de uma seqüência convergente e mais o limite a dessa seqüência é um espaço compacto.

9. Tôda aplicação aberta (em particular, todo homeomorfismo local, vide Cap. III, pág. 66) de um espaço compacto X num espaço de Hausdorff conexo Y é *sôbre* Y. Concluir que $\xi : R \to S^1$, $\xi(t) = e^{2\pi i t}$, é sôbre S^1.

10. Seja $C^1 = C^1([a, b]; R)$ o conjunto das funções $f : [a, b] \to R$ que possuem derivada contínua em todos os pontos de $[a, b]$. C^1 é um espaço vetorial, no qual consideramos a norma $|f|_* = \sup\limits_{a \leq t \leq b} \{|f(t)| + |f'(t)|\}$. Uma função $h \in C^1$ chama-se um *difeomorfismo* (de classe C^1) quando h possui um inverso $h^{-1} : h([a, b]) \to [a, b]$ que também tem derivada contínua em todos os pontos. Para que $h \in C^1$ seja um difeomorfismo, é necessário e suficiente que $h'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a, b]$. O conjunto dos difeomorfismos é aberto no espaço C^1.

11. Sejam X um espaço compacto e M um espaço métrico. O conjunto das aplicações contínuas de X *sôbre* M é fechado em $\mathfrak{C}(X; M)$ (topologia da convergência uniforme.)

12. Tôda função semicontínua inferiormente $f : X \to R$, definida num espaço compacto X é limitada inferiormente e atinge o seu mínimo num ponto $x_0 \in X$. Resultado análogo para funções semicontínuas superiormente.

13. Seja M um espaço métrico compacto. Tôda aplicação $f : M \to N$ tal que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$ é sôbre M. (Isto é, tôda imersão isométrica $f : M \to M$ é uma isometria de M.)

14. Seja M um espaço métrico compacto. Se uma aplicação contínua $f : M \to M$ é tal que $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$, então f é uma isometria de M.

15. Tôda função limitada $f : X \to R$ cujo gráfico é fechado é contínua. Dê exemplo de uma função descontínua $f : [0, 1] \to R$ cujo gráfico é um subconjunto fechado de $[0, 1] \times R$.

16. Prove: *a)* Nem todo espaço compacto é metrizável.

b) Um espaço localmente compacto $\bar{E}1$ de Hausdorff pode ser seqüencialmente compacto sem ser compacto.

c) Todo espaço quociente de um espaço compacto é compacto.

d) Se todo subespaço de um espaço de Hausdorff é compacto, então o espaço em questão é fin to.

e) Se uma topologia compacta é mais fina do que uma topologia de Hausdorff, então as duas coincidem.

f) As componentes conexas de um espaço compacto são compactas.

g) Um espaço localmente compacto de Hausdorff pode não ser norma .

h) Um espaço compacto localmente conexo possui apenas um número finito de componentes conexas.

17. As seguintes condições são necessárias e suficientes para que um espaço métrico M seja compacto:

a) Tôda cobertura aberta enumerável possui uma subcobertura finita.

b) Tôda seqüência decrescente $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$ de subconjuntos fechados não-vazios tem interseção não-vazia $\bigcap F_n$.

c) Todo subconjunto fechado e discreto é finito.

18. Um conjunto infinito X, munido da topologia cujos abertos são os complementares das partes finitas de X, é compacto, todos os seus pontos são fechados e todos os seus subconjuntos (fechados ou não) são compactos. Obter uma seqüência decrescente de subconjuntos fechados $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$, com $\bigcap F_n = \emptyset$, cada um dos F_n sendo infinito.

19. Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, a, b\}$. Definir em X uma topologia ta' que cada um dos pontos x_n é isolado, $x_n \to a$ e $x_n \to b$. X é compacto, seus subconjuntos $A = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots, a\}$ e $B = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots, b\}$ são compactos e $A \cap B$ não é compacto.

20. Dados dois pontos $x \neq y$ num espaço vetorial E, a *reta* $\overline{xy}$ é o conjunto dos pontos $tx + (1 - t)y$, onde t assume todos os valôres reais. Um subconjunto $A \subset E$ diz-se uma *variedade afim* quando, para $x \neq y$ quaisquer em A, a reta $\overline{xy}$ está contida em A. (Um ponto e o conjunto vazio são variedades afins.) Para que um subconjunto não-vazio $A \subset E$ seja uma variedade afim é necessário e suficiente que existam $a \in E$ e um subespaço vetorial $S \subset E$ tais que $A = a + S = \{a + v; v \in S\}$. A interseção de uma família qualquer de variedades afins de um espaço vetorial E é uma variedade afim de E (que pode ser vazia). A variedade afim $A(X)$, *gerada* por um subconjunto $X \subset E$ é a interseção de tôdas as variedades afins de E que contém X. $A(X)$ consiste de tôdas as combinações lineares $\Sigma \lambda_i x_i$, com $x_1, \ldots, x_n \in X$ e $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Todo conjunto convexo $X \subset R^n$ tem interior não-vazio na variedade afim $A(X)$ gerada por X.

21. Seja P_n o subespaço vetorial de $\mathfrak{C}([a, b]; R)$ formado pelos polinômios de grau $\leq n$. P_n tem dimensão $n + 1$, logo, é um subconjunto fechado de $\mathfrak{C}([a, b]; R)$. (Topologia da convergência uniforme.) Um teorema clássico de Weierstrass diz que tôda função contínua $f : [a, b] \to R$ é limite uniforme de uma seqüência de polinômios. Isto significa que $P = \bigcup P_n$ é denso em $\mathfrak{C}([a, b]; R$. Concluir que se $f = \lim p_k$ (uniformemente) e os polinômios p_k têm graus limitados, então f é um polinômio. A aplicação $\varphi : P_n \to R^{n+1}$ tal que $\varphi(a_0 + a_1 + \ldots + a_n x^n) = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ é um isomorfismo de espaços vetoriais, donde é um homeomorfismo. Concluir que uma seqüência de polinômios p_k converge uniformemente para um polinômio p no intervalo $[a, b]$ se, e sòmente se, cada coeficiente de p_k converge para o coeficiente correspondente de p. Fixados arbitràriamente $n+1$ pontos distintos $t_0, t_1, \ldots, t_n$ em $[a, b]$, a aplicação $\xi : P_n \to R^{n+1}$ tal que $\xi(p) = (p(t_0), p(t_1), \ldots, p(t_n))$ é um isomorfismo de espaços vetoriais. Concluir que uma seqüência de polinômios de grau $\leq n$ converge uniformemente no intervalo $[a, b]$ se, e sòmente se, a seqüência converge simplesmente em $n + 1$ pontos fixados em $[a, b]$.

22. O conjunto $O(n)$ das matrizes ortogonais reais $n \times n$ é um subespaço compacto de R^{n^2}. $O(n)$ tem duas componentes conexas, a saber: o grupo $SO(n)$ das matrizes ortogonais com determinante $+1$ e o conjunto das matrizes ortogonais com determinante -1.

23. Se $f : M \to R$ fôr uma função contínua ilimitada no espaço métrico $M = (M, d)$ a métrica $d_1(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$ é ilimitada e equivalente a d. Concluir que um espaço métrico é compacto se, e sòmente se, é limitado em relação a qualquer métrica compatível com sua topologia.

24. A finalidade dêste exercício é provar que, se um espaço métrico M é completo em relação a qualquer métrica compatível com sua topologia, então M é compacto. Pelo exercício anterior, basta mostrar que se existe alguma métrica ilimitada compatível com a topologia de M, então M é homeomorfo a um espaço métrico não completo. Pela Observação 2 que segue a Prop. 10, Cap. VI, M é isométrico (e portanto pode ser identificado) a um conjunto de vetores $\neq 0$ num espaço vetorial normado E. Ora, a aplicação $\varphi : E - \{0\} \to E - \{0\}$, definida por $\varphi(v) = v/|v|^2$ é um homeomorfismo ($\varphi^{-1} = \varphi$) com a seguinte propriedade: dada uma seqüência de pontos $x_n \in E - \{0\}$ com $|x_n| \to \infty$, tem-se $\varphi(x_n) \to 0$. Conclua que, se a métrica de M fôr ilimitada, $\varphi(M)$ não é fechado em E, logo, M é homeomorfo a um espaço métrico não completo.

25. Uma função $f : [a, b] \to R$ diz-se *regrada* quando possui limites laterais (vide Exerc. 27, Cap. IV) em todos os pontos de $[a, b]$. Uma função $f : [a, b] \to R$ é regrada se, e sòmente se, é limite uniforme de funções simples. (*Cf.* Exerc. 25, Cap. VI.) Em outras palavras, o conjunto das funções regradas é o fecho $\mathfrak{S}$ do conjunto das funções simples no espaço $\mathfrak{C}([a, b]; R)$.

26. Um caminho $f : [a, b] \to E$ num espaço vetorial normado E diz-se *retilíneo* quando $f(ta + (1-t)b) = tf(a) + (1-t)f(b)$ para $0 \leq t \leq 1$ qualquer. Um caminho $f : [a, b] \to E$ diz-se *poligonal* quando existem números t_i, com $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, tais que a restrição de f a cada intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ é um caminho retilíneo. Provar que o conjunto dos caminhos poligonais $f : [a, b] \to E$ é denso no espaço $\mathfrak{C}([a, b]; E)$ de todos os caminhos $[a, b] \to E$. (Topologia da convergência uniforme.)

27. *Comprimento de arco.* Uma *partição* do intervalo $[a, b]$ é um conjunto finito $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$. Diz-se que a partição P refina a partição Q quando $P \supset Q$. A norma de uma partição $P = \{t_i\}$ é o número $|P| = \text{máx.} \{|t_{i+1} - t_i|; i =$

$= 0, 1, \ldots, n-1\}$. Dado um caminho $f : [a, b] \to M$ no espaço métrico M e uma partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ do intervalo $[a, b]$, escreve-se $l(f; P) = d(f(t_0), f(t_1)) + \ldots + d(f(t_{n-1}), f(t_n))$. Se P refina Q então $l(f; P) \geq l(f; Q)$. O caminho f diz-se *retificável* quando o conjunto dos números $l(f; P)$, onde P varia entre tôdas as partições de $[a, b]$, é limitado. O *comprimento* de um caminho retificável $f : [a, b] \to M$ é definido por $l(f) = \sup_P l(f; P)$. Todo caminho poligonal f num espaço normado é retificável e seu comprimento é igual a $\Sigma|a_{i+1} - a_i|$, se f é formado pelos segmentos de reta $[a_0, a_1], \ldots, [a_{n-1}, a_n]$. Dado um caminho retificável $f : [a, b] \to M$ num espaço métrico M, tem-se $l(f) = \lim_{|P| \to 0} l(f; P)$ no sentido seguinte: dado arbitràriamente $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|P| < \delta$ implica $l(f) - l(f; P) < \epsilon$. O caminho $f : [0, 1] \to R^2$, definido por $f(t) = (t, t \operatorname{sen}(1/t))$, não é retificável. Um caminho retificável $f : [a, b] \to R$ chama-se às vêzes uma "função de variação total limitada". Se $f \in C^1([a, b]; R)$ então f é retificável e $l(f) = \int_a^b |f'(t)|\, dt$. Para que $f : [a, b] \to R^n$ seja retificável, é necessário suficiente que $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$, onde cada $f_i : [a, b] \to R$ é retificável. Se cada $f_i \in C^1$ então f é retificável e $l(f) = \int_a^b \sqrt{(f_1')^2 + \ldots + (f_n')^2}\, dt$, se tomarmos em R^n a norma $|x| = \sqrt{(x_1)^2 + \ldots + (x_n)^2}$. Seja $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}([a, b]; M)$ o subespaço de $\mathfrak{C}([a, b]; M)$ formado pelos caminhos retificáveis. A função real $l : \mathfrak{R} \to R$ que associa a cada $f \in \mathfrak{R}$ o seu comprimento $l(f)$, é semicontínua inferiormente, mas não é contínua.

Sejam φ: $[a, b] \to [c, d]$ uma função contínua, não decrescente, tal que $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$, e $g : [c, d] \to M$ um caminho tal que $f = g \circ \varphi$: $[a, b] \to M$ é retificável. Então, g é retificável e $l(g) = l(f)$. Se o caminho $f : [a, b] \to M$ é retificável e $l(f) = L$, a função φ: $[a, b] \to [0, L]$, definida por $\varphi(t) = l(f|[a, t])$, é contínua e existe um único caminho g: $[0, L] \to M$ tal que $f = g \circ \varphi$. O caminho g é retificável e goza de propriedade $l(g|[0,1]) = s$ para todo $s \in [0, L]$. Por isso diz-se que g é "parametrizado pelo comprimento de arco".

28. Para que uma seqüência (x_n), num espaço métrico compacto M, seja convergente é necessário e suficiente que ela possua exatamente um valor de aderência. (Vide Exerc. 15, Cap. IV.)

29. Dois pontos a, b num espaço métrico M dizem-se *ϵ-encadeados* ($\epsilon > 0$) quando existem pontos $x_0, \ldots, x_n \in M$ tais que $x_0 = a$, $x_n = b$ e $d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Num espaço métrico conexo, dois pontos quaisquer são ϵ-encadeados para qualquer $\epsilon > 0$. A recíproca é falsa em geral, como se vê no espaço $M = R - \{0\}$. Se, porém, M é compacto e dois pontos quaisquer de M são ϵ-encadeados para todo $\epsilon > 0$, então M é conexo. Dê exemplo de um espaço métrico completo desconexo tal que, para todo $\epsilon > 0$, dois quaisquer dos seus pontos podem ser ϵ-encadeados.

30. Seja $K_1 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots$ uma seqüência decrescente de subconjuntos compactos de um espaço métrico M. Dado qualquer aberto U em M, contendo a interseção $K = \bigcap K_n$, existe n_0 tal que $K_n \subset U$ para todo $n \geq n_0$. Concluir que a interseção de uma seqüência decrescente de subconjuntos compactos conexos de um espaço métrico é um conjunto (compacto e) conexo. Dê exemplo de uma seqüência decrescente de subconjuntos fechados conexos do plano cuja interseção é desconexa.

31. Seja X um subespaço da reta. Tôda componente conexa C de X é a interseção dos subconjuntos abertos-fechados de X que contém C. O mesmo não se dá no plano: seja X a reunião das retas verticais X_n, de abscissa $1/n$, $n \in N$, e mais os pontos $p = (0, 0)$, $q = (0, 1)$. O ponto p é uma componente conexa de X mas todo subconjunto aberto-

-fechado de X que contém p contém também q. Mostre que, num espaço métrico compacto, tôda componente conexa é a interseção dos conjuntos aberto-fechados que a contém.

32. Sejam X, Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \to Y$ diz-se uma *aplicação de recobrimento* quando todo ponto $y \in Y$ possui uma vizinhança aberta V tal que $f^{-1}(V) = \bigcup U_\lambda$ é uma reunião de subconjuntos abertos $U_\lambda \subset X$, cada um dos quais é aplicado por f homeomorfamente sôbre V. (Diremos que V é uma vizinhança *distinguida.*) Tôda aplicação de recobrimento $f : X \to Y$ é um homeomorfismo local de X sôbre Y. Em particular, f é aberta, contínua e, para cada $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ é um subconjunto discreto de X. A aplicação $\xi : R \to S^1$, $\xi(t) = e^{2\pi it}$, é de recobrimento. A restrição de ξ ao intervalo $(0, \infty)$ é um homeomorfismo local de $(0, \infty)$ sôbre S^1 mas não é uma aplicação de recobrimento. Todo homeomorfismo local de um espaço compacto X sôbre um espaço Y é uma aplicação de recobrimento. (Por exemplo, $\pi : S^n \to P^n$.) Se $f : X \to Y$ e $g : X' \to Y'$ são aplicações de recobrimento então $h = f \times g : X \times X' \to$ $\to Y' \times Y$, definida por $h(x, x') = (f(x), g(x'))$, é uma aplicação de recobrimento. (Por exemplo, $\xi : R^n \to S^1 \times \ldots \times S^1 = T^n$.) Se $f : X \to Y$ é uma aplicação de recobrimento então dado um caminho $\varphi : [a, b] \to Y$ e um ponto $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = \varphi(a)$, existe um caminho $\tilde{\varphi} : [a, b] \to X$ tal que $\tilde{\varphi}(a) = x_0$ e $f \circ \tilde{\varphi} = \varphi$. O caminho $\tilde{\varphi}$ é único nestas condições, desde que Y seja um espaço de Hausdorff. (Vide Exerc. 29, Cap. III). Para provar a existência de $\tilde{\varphi}$, decomponha $[a, b]$ por meio de pontos $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ tais que, para cada $i = 0, 1, \ldots, n$, existe uma vizinhança distinguida $V_i \subset Y$ com $\varphi([t_i, t_{i+1}]) \subset V_i$. Defina $\tilde{\varphi}$ sucessivamente nos intervalos $[t_i, t_{i+1}]$. Comece com $[a, t_1]$. Como $\varphi([a, t_1]) \subset V_0$, temos $x_0 \in f^{-1}(V_0)$, logo, existe um aberto U_0 em X tal que $x_0 \in U_0$ e $f_0 = f | U_0$ é homeomorfismo de U_0 sôbre V_0. Defina $\tilde{\varphi} = (f_0)^{-1} \circ \varphi$ no intervalo $[a, t_1]$. Considere agora $x_1 = \tilde{\varphi}(t_1)$. Como $\varphi([t_1, t_2]) \subset V_1$, temos $x_1 \in f^{-1}(V_1)$, logo existe um aberto $U_1 \subset X$ tal que $x_1 \in U_1$ e $f_1 = f | U_1$ é um homeomorfismo de U_1 sôbre V_1. Ponha, em $[t_1, t_2]$, $\tilde{\varphi} = (f_1)^{-1} \circ \varphi$. Prossiga anàlogamente.

33. *O teorema do ponto fixo de Brower em dimensão 2.* A aplicação de recobrimento $\xi : R \to S^1$, definida por $\xi(t) = e^{it}$, (note a mudança na definição de ξ) mostra, em virtude do exercício anterior, que, dado qualquer caminho $\varphi : [a, b] \to S^1$ e um ponto $c \in R$ tal que $\xi(c) = a$, existe um único caminho $\tilde{\varphi} : [a, b] \to R$ tal que $\tilde{\varphi}(a) = c$ e $\xi\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t)$, isto é, $\varphi(t) = e^{i\tilde{\varphi}(t)}$ para todo $t \in [a, b]$. Se φ fôr um caminho fechado, isto é, $\varphi(a) =$ $= \varphi(b)$, então $n(\varphi) = \frac{1}{2\pi}[\tilde{\varphi}(b) - \tilde{\varphi}(a)]$ é um número inteiro, independente da escolha do ponto inicial $c = \tilde{\varphi}(a)$. $n(\varphi)$ exprime o "número de voltas" que φ dá ao longo de S^1 e chama-se o *grau* de φ. Se $\varphi, \psi : [a, b] \to S^1$ são tais que $|\varphi(t) - \psi(t)| < 2$ para todo $t \in [a, b]$, então $n(\varphi) = n(\psi)$. A partir daí, mostre que não existe uma retração $r : D^2 \to$ $\to S^1$, do seguinte modo. Dada r, a aplicação $H : I \times I \to S^1$, definida por $H(s, t) =$ $= r(te^{2\pi is})$, é contínua. Como $I \times I$ é compacto, existe $\epsilon > 0$ tal que $|t - t'| < \epsilon$ implica $|H(s, t) - H(s, t')| < 2$ para todo $s \in I$. Sejam $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ tais que $t_{i+1} - t_i < \epsilon$, $i = 0, 1, \ldots, m - 1$. Defina os caminhos $\varphi_i : I \to S^1$ pondo $\varphi_i(s) = H(s, t_i)$. Então, $|\varphi_{i+1}(s) - \varphi_i(s)| < 2$ para todo $s \in I$, $i = 0, 1, \ldots, m - 1$. Logo, $n(\varphi_0) = n(\varphi_1) = \ldots m(\varphi_m)$. Em particular φ_0 e φ_m têm o mesmo grau, o que é absurdo pois φ_0 é constante, donde $n(\varphi_0) = 0$, enquanto $\varphi_m(s) = e^{2\pi is}$ donde $n(\varphi_m) = 1$. Como corolário, tôda aplicação contínua $f : D^2 \to D^2$ tem um ponto fixo. (Vide Exerc. 5, Cap. VI.)

34. Tôda aplicação contínua $f : S^1 \to S^1$, de grau -1, tem um ponto fixo.

35. Num espaço localmente compacto, quais das afirmações abaixo são verdadeiras?

a) A reunião de dois conjuntos localmente compactos é localmente compacta.

b) A interseção de dois conjuntos localmente compactos é localmente compacta.

c) O complemento de um conjunto localmente compacto é localmente compacto.

36. A imagem de um espaço localmente compacto por uma aplicação contínua aberta é um espaço localmente compacto. Dê exemplo de uma aplicação contínua $f : R \to R^2$ tal que $f(R)$ não é localmente compacto.

37. Dados $a, b \in R^n$ quaisquer, existe sempre um homeomorfismo de R^n sôbre si mesmo que leva a em b, a saber, a translação $\tau : R^n \to R^n$, $\tau(x) = x + (b - a)$. A bola aberta unitária $B^n = \{x \in R^n; |x| < 1\}$ é homeomorfa a R^n através da aplicação $\varphi : B^n \to R^n$, $\varphi(x) = x/(1 - |x|)$, $\varphi^{-1}(y) = y/(1 + |y|)$. Dados $a, b \in B^n$ arbitrários, o homeomorfismo $h = \varphi^{-1} \circ \tau \circ \varphi : B^n \to B^n$, $\tau : y \to y + [\varphi(b) - \varphi(a)]$, leva a em b. Mostre que h se estende a um homeomorfismo $\bar{h} : D^n \to D^n$, $D^n = \{x \in R^n; |x| \leq 1\}$, se pusermos $\bar{h}(x) = x$ para $|x| = 1$. (Usar a Prop. 14 do Cap. II.) Assim, dados dois pontos a, b quaisquer no interior do disco unitário D^n, existe um homeomorfismo de D^n sôbre si mesmo, que transforma a em b e reduz-se à identidade na fronteira S^{n-1} de D^n.

38. Uma *variedade topológica* de dimensão n é um espaço topológico V tal que todo ponto $x \in V$ possui uma vizinhança aberta, homeomorfa a um subconjunto aberto do espaço euclidiano R^n. Esta definição equivale a exigir que cada ponto $x \in V$ possua uma vizinhança homeomorfa ao disco unitário $D^n \subset R^n$. Exemplos de variedades: todo subconjunto aberto de R^n; a esfera S^n (usar projeção estereográfica); o produto de duas variedades (em particular o toro $R^n = S^1 \times \ldots \times S^1$). Uma variedade V é localmente compacta e localmente conexa por caminhos. Em particular V é conexa se, e sòmente se, é conexa por caminhos. Dados dois pontos a, b numa variedade conexa V, existe um homeomorfismo $h : V \to V$ tal que $h(a) = b$. [Tomar um caminho $f : [0,1] \to V$, com $f(0) = a, f(1) = b$. Obter $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = 1$ tais que, para todo $i = 0, 1, \ldots, k-1$, os pontos $a_i = f(t_i)$ e $a_{i+1} = f(t_{i+1})$ pertencem à mesma vizinhança U_i, homeomorfa ao disco D^n. Usando o exercício anterior, definir um homeomorfismo $h_i : V \to V$ tal que $h_i(a_i) = a_{i+1}$ e $h_i | (V - U_i) =$ identidade. Pôr $h = h_{k-1} \circ \ldots h_1 \circ h_0$]. O exercício anterior e êste valem para um espaço vetorial normado E qualquer em lugar do espaço R^n.

39. Um espaço topológico X diz-se *compactamente gerado* (ou um k-espaço) quando goza da seguinte propriedade: dado $F \subset X$, se $F \cap K$ é fechado em K para todo compacto $K \subset X$, então F é fechado em X. Os espaços topológicos $E1$ e os espaços de Hausdorff localmente compactos fornecem exemplos de espaços compactamente gerados. Se X é compactamente gerado, para que uma aplicação $f : X \to Y$ seja contínua é necessário e suficiente que a restrição de f a cada subconjunto compacto de X seja contínua.

40. *Aplicações próprias.* Sejam X, Y espaços topológicos. Uma aplicação $f : X \to Y$ diz-se *própria* quando é contínua, fechada e, para cada $y \in Y$, a imagem inversa $f^{-1}(y)$ é compacta. Para que $f : X \to Y$ seja própria é necessário e suficiente que $f(X)$ seja fechado em Y e que $f : X \to f(X)$ seja própria. (Para uma caracterização de aplicações contínuas fechadas de um espaço sôbre outro, vide Exerc. 57, Cap. III.) Se X é compacto e Y é um espaço de Hausdorff, tôda aplicação contínua $f : X \to Y$ é própria. Se X não é compacto e c é um ponto, então $f : X \to c$ é contínua e fechada mas não é própria. Se X é o subespaço do plano obtido omitindo-se do quadrado $I \times I$ o segmento vertical

$\{(0, t); 0 \leq t < 1/2\}$ então a projeção $p : X \to I$, $p(s, t) = s$, é contínua e a imagem inversa $p^{-1}(s)$ de todo ponto $s \in I$ é compacta mas p não é própria. Se M e N são espaços métricos, para que $f : M \to N$ seja própria é necessário e suficiente que seja contínua e que a imagem $(f(x_n))$ de uma seqüência (x_n) sem subseqüências convergentes seja uma seqüência com a mesma propriedade em N. Todo polinômio de grau ≥ 1 é uma aplicação própria $p : R \to R$. (Idem para polinômios complexos $p : R^2 \to R^2$). Sejam X, Y espaços de Hausdorff localmente compactos. Para que uma aplicação contínua $f : X \to Y$ seja própria é necessário e suficiente que seja contínua a sua extensão $f^{\#} : X^{\#} \to Y^{\#}$ (onde $^{\#}$ indica a compactificação de Alexandrov), definida por $f^{\#}(\infty) = \infty$. Se $f : X \to Y$ é própria, então para cada compacto $K \subset Y$, $f^{-1}(K)$ é compacto. Se X e Y forem compactamente gerados (vide exercício anterior) esta condição é suficiente para que f seja própria. Se $f : X \to Y$ é própria e é um homeomorfismo local de X sôbre Y, então f é uma aplicação de recobrimento (vide Exerc. 32).

Base Enumerável e Metrizabilidade

Capítulo VIII

§ 1. Introdução

Todo espaço métrico M satisfaz à primeira condição de enumerabilidade: qualquer ponto $x \in M$ possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças. Estudaremos neste capítulo os espaços topológicos que satisfazem à chamada "segunda condição de enumerabilidade", a qual exige a existência de uma base enumerável para os abertos do espaço. Tal condição é útil em várias aplicações, como por exemplo na teoria das Variedades Diferenciáveis e na teoria da dimensão de espaços topológicos.

O resultado mais importante que demonstraremos neste capítulo é o Teorema da Metrização de Urysohn, o qual afirma que todo espaço de Hausdorff normal (ou mesmo regular) com base enumerável é metrizável. Daremos também condições para que a compactificação de Alexandrov de um espaço métrico localmente compacto M seja metrizável. (É necessário e suficiente que M possua base enumerável.) Estudaremos as relações entre base enumerável, separabilidade e o Teorema de Lindelöf, as quais assumem um aspecto particularmente simples no caso de espaços métricos.

§ 2. Espaços Topológicos com Base Enumerável

Como sabemos, uma *base* de um espaço topológico X é uma coleção $\mathfrak{B}$ de subconjuntos abertos de X tal que todo aberto $A \subset X$ se exprime como reunião $A = \bigcup B_\lambda$ de conjuntos $B_\lambda \in \mathfrak{B}$. Em outras palavras, dados um aberto A em X e um ponto $x \in A$, existe um aberto básico $B \in \mathfrak{B}$ com $x \in B \subset A$.

Assim, a fim de que uma coleção $\mathfrak{B}$ de abertos seja uma base de X, é necessário e suficiente que, para cada $x \in X$, os conjuntos $B \in \mathfrak{B}$ que contêm o ponto x formem um sistema fundamental de vizinhanças de x.

Estudaremos, neste capítulo, os espaços topológicos nos quais existe uma *base enumerável* de abertos $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots\}$. Em particular, num tal espaço, cada ponto possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças. A recíproca é falsa. Num espaço métrico, todo ponto possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças mas existem espaços métricos que não admitem uma base enumerável. (Vide Exs. 2, 11, 12.)

EXEMPLOS

1. Todo espaço métrico enumerável $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ tem uma base enumerável. Basta considerar a coleção $\mathfrak{B}$ de tôdas as bolas abertas $B_{mn} = B(x_m; 1/n)$, $m, n \in N$. $\mathfrak{B}$ é uma coleção enumerável de abertos em M e, para cada $x_m \in M$, as bolas abertas de centro x_m e raio $1/n$ formam um sistema fundamental de vizinhanças do ponto x_m. Logo, $\mathfrak{B}$ é uma base de M. Em particular, o conjunto dos números racionais ou, mais geralmente, o espaço Q^n dos pontos $r = (r^1, \ldots, r^n) \in R^n$ cujas coordenadas são tôdas racionais, tem base enumerável (quando considerado com sua topologia natural). Note-se, entretanto, que um espaço topológico enumerável não-metrizável pode não ter base enumerável. (Vide Exerc. 22.)

2. Um espaço discreto M, com uma infinidade não-enumerável de pontos, não pode possuir uma base enumerável. Com efeito, como cada ponto $x \in M$ é um subconjunto aberto, tôda base $\mathfrak{B}$ de M deve conter entre seus abertos básicos pelo menos os conjuntos $\{x\}$, $x \in M$ e portanto $\mathfrak{B}$ não é enumerável.

3. A reta R tem uma base enumerável de abertos, a saber, a coleção de todos os intervalos abertos $(r - 1/n,\ r + 1/n)$, com raio $1/n$ e centro num número racional r. Com efeito, dados um aberto $A \subset R$ e um ponto $x \in A$, existe $\epsilon > 0$ tal que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset A$. Tomemos um número racional r tal que $|r - x| < 1/n$, onde $2/n < \epsilon$. Então, $x \in (r - 1/n, r + 1/n) \subset (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset A$.

$r-1/n$ r $r+1/n$
$x-\epsilon$ x $x+\epsilon$

Proposição 1 — *Se um espaço topológico X tem base enumerável, todo subespaço $S \subset X$ tem base enumerável.*

Demonstração: Mais precisamente, dada qualquer base $\mathfrak{B}$ em X, a coleção $\mathfrak{B}_S$ de tôdas as interseções $B \cap S$, onde B varia em $\mathfrak{B}$, é uma base

de S. (Quando $\mathfrak{B}$ fôr enumerável, $\mathfrak{B}_S$ será também.) Com efeito, os abertos de S são as interseções $A = A' \cap S$, onde A' é um aberto de X. Se $x \in A$ então, $x \in A'$ e, como $\mathfrak{B}$ é uma base em X, existe $B \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B \subset A'$ donde $x \in B \cap S \subset A' \cap S = A$.

Corolário — *Num espaço X com base enumerável, todo subconjunto não-enumerável S contém um ponto de acumulação.*

Com efeito, se nenhum ponto de S fôsse um ponto de acumulação, então o subespaço S seria discreto. Pelo Ex. 2, S não teria base enumerável, o que violaria a Prop. 1.

Proposição 2 — *O produto cartesiano $X_1 \times \ldots \times X_k$ tem base enumerável se, e sòmente se, cada um dos fatôres $X_1, \ldots, X_k$ tem base enumerável.*

Demonstração: Basta considerar o caso de um produto $X \times Y$. O caso mais geral apenas complica a notação. Sejam $\mathfrak{B} = (B_m)$ e $\mathfrak{C} = (C_n)$ bases enumeráveis de X e Y respectivamente. Afirmamos que a coleção enumerável de abertos $\mathfrak{D} = (B_m \times C_n)$, $m, n \in N$, é uma base de $X \times Y$. Com efeito, dados um aberto $A \subset X \times Y$ e um ponto $(x, y) \in A$, existem em virtude da definição da topologia de $X \times Y$, abertos $U \subset X$ e $V \subset Y$ tais que $(x, y) \in U \times V \subset A$. Como $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{C}$ são bases, existem $B_m \in \mathfrak{B}$ e $C_n \in \mathfrak{C}$ tais que $x \in B_m \subset U$ e $y \in C_n \subset V$, donde $(x, y) \in B_m \times C_n \subset \subset U \times V \subset A$. Recìprocamente, se o produto $X \times Y$ tem base enumerável, como as projeções $p_1 : X \times Y \to X$ e $p_2 : X \times Y \to Y$ são contínuas e abertas, segue-se que X e Y têm base enumerável, em virtude do lema seguinte:

Lema — *Se X é um espaço topológico com base enumerável e $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua, aberta, de X sôbre Y, então o espaço topológico Y também tem base enumerável.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{B} = (B_n)$ uma base enumerável de X. Então, $\mathfrak{B}' = \{f(B_n); n \in N\}$ é uma coleção enumerável de abertos em Y. Dados um aberto $A' \subset Y$ e um ponto $y \in A'$, seja $x \in X$ tal que $f(x) = y$. O conjunto $A = f^{-1}(A')$ é uma vizinhança aberta de x em X, logo, existe $B_n \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B_n \subset A$ e portanto $y \in f(B_n) \subset A'$.

Observação — Mais geralmente, foi demonstrado acima:

1) que se $\mathfrak{B}$ é uma base de X e $\mathfrak{C}$ é uma base de Y então o conjunto $\mathfrak{D}$ dos produtos $B \times C$, onde B varia em $\mathfrak{B}$ e C varia em $\mathfrak{C}$, é uma base de $X \times Y$;

2) que se $f : X \to Y$ é uma aplicação contínua aberta de X sôbre Y, qualquer base de X é transformada por f numa base de Y.

EXEMPLO

4. O espaço euclidiano $R^n = R \times R \times \ldots \times R$, tem base enumerável. Mais precisamente, as bolas abertas $B(r; 1/m)$, com centro num ponto racional $r \in Q^n$ e raio da forma $1/m$, constituem uma base enumerável do espaço R^n.

PROPOSIÇÃO 3 — *Seja X um espaço topológico com base enumerável. Então:*

1) *tôda cobertura aberta de X admite uma subcobertura enumerável;*

2) *existe um subconjunto enumerável denso em X.*

Demonstração: 1) Seja $\mathfrak{B} = (B_n)$ uma base enumerável de X. Dada uma cobertura aberta $\mathfrak{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$ do espaço X, seja $P \subset N$ o conjunto dos nteiros p tais que B_p está contido em algum conjunto C_λ da cobertura. Para cada $p \in P$, escolhamos, de uma vez por tôdas, um índice λ_p tal que $B_p \subset C_{\lambda_p}$. Afirmamos que $X = \bigcup_{p \in P} C_{\lambda_p}$ e portanto $\mathfrak{C}' = (C_{\lambda_p})_{p \in P}$ é uma subcobertura enumerável de $\mathfrak{C}$. Com efeito, dado qualquer $x \in X$, existe $\lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$. Como C_λ é aberto e $\mathfrak{B}$ é uma base, existe $p \in N$ tal que $x \in B_p \subset C_\lambda$. Assim, $p \in P$ e portanto $B_p \subset C_{\lambda_p}$. Segue-se que $x \in C_{\lambda_p}$, como queríamos demonstrar.

2) Dada uma base enumerável $\mathfrak{B} = (B_n)$ do espaço X, escolhamos, para cada $n \in N$, um ponto $x_n \in B_n$. O conjunto enumerável $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ assim obtido é denso em X. Com efeito, dado qualqüer aberto não-vazio $A \subset X$, a um ponto $x \in A$, existe n com $x \in B_n \subset A$, donde $x_n \in A$, o que prova a afirmação feita.

Diz-se que um espaço topológico X *é um espaço de Lindelöf* quando tôda cobertura aberta de X admite uma subcobertura enumerável.

Um espaço topológico X que possui um subconjunto enumerável denso chama-se *separável*.

A proposição acima afirma, portanto, que todo espaço topológico com base enumerável é um espaço de Lindelöf e é separável. Para espaços métricos, essas 3 propriedades são equivalentes (vide Prop. 4), mas as únicas implicações válidas em geral são as da Prop. 3. (*Cf.* Exerc. 15.)

COROLÁRIO — *Num espaço com base enumerável, tôda coleção de abertos não-vazios, dois a dois disjuntos, é enumerável.*

Com efeito, seja $\mathfrak{A} = (A_\lambda)$ uma coleção de abertos nas condições acima. O subespaço $S = \bigcup A_\lambda$ tem base enumerável e a única subcobe tura de $\mathfrak{A}$ é $\mathfrak{A}$ mesmo. Segue-se da Prop. 3 que $\mathfrak{A}$ é enumerável.

§ 3. Espaços Métricos com Base Enumerável

A propriedade de ser separável não tem grande utilidade para espaços topológicos quaisquer. Mas, para espaços métricos, ela é equivalente à existência de uma base enumerável (que é realmente a condição de enumerabilidade importante) e ganha assim interêsse porque é, em geral, mais fácil verificar a existência de um subconjunto enumerável denso do que de uma base enumerável.

EXEMPLOS

5. O conjunto enumerável Q^n, dos pontos $r = (r^1, \ldots, r^n)$ de coordenadas racionais, é denso no espaço euclidiano R^n.

6. O espaço de Hilbert H é separável. Com efeito, seja E o subconjunto enumerável de H formado por todos os pontos $r = (r^1, \ldots, r^n, 0, \ldots)$ que têm apenas um número finito de coordenadas não-nulas, tôdas elas racionais. Afirmamos que E é denso no espaço de Hilbert H. Para isso, dados um ponto $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n, \ldots) \in H$ e um número $\epsilon > 0$, arbitrários, mostremos que existe $r \in E$ tal que $|r - x| < \epsilon$. Como $\Sigma(x^n)^2 < \infty$, existe $n_0 \in N$ tal que $\sum_{n > n_0} (x^n)^2 < \epsilon/2$. Por outro lado, como Q^{n_0} é denso em R^{n_0}, podemos obter $r_0 = (r^1, \ldots, r^{n_0}) \in Q^{n_0}$ tal que $\sum_{n \leq n_0} (x^n - r^n)^2 < \epsilon/2$. Segue-se que, pondo $r = (r^1, r^2, \ldots, r^{n_0}, 0, \ldots)$, temos $r \in E$ e $|r - x| < \epsilon$.

7. Todo espaço métrico totalmente limitado M é separável. Com efeito, para cada $n \in N$ existe um conjunto finito $E_n = \{x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{np}\}$, $p = p(n)$, tal que cada ponto $x \in M$ dista menos de $1/n$ de algum ponto de E_n. Segue-se daí que a reunião $E = \bigcup E_n$ é um subconjunto enumerável denso em M.

8. Em particular, todo espaço métrico compacto é separável.

9. Se um subespaço S de um espaço topológico X é separável, então seu fecho $\overline{S}$ também é separável. Com efeito, todo subconjunto denso em S é denso em $\overline{S}$.

10. Em particular, se um espaço métrico M é separável, seu completamento $\hat{M}$ também é separável.

Proposição 4 — *As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico M são equivalentes:*

1) *M tem base enumerável;*
2) *M é um espaço de Lindelöf;*
3) *M é separável.*

Demonstração: Na Prop. 3 foi provado que 1) $\Rightarrow$ 2). Resta portanto apenas provar que 2) $\Rightarrow$ 3) e que 3) $\Rightarrow$ 1).

2) $\Rightarrow$ 3). Para cada $m \in N$, as bolas abertas de raio $1/m$, com centro em todos os pontos $x \in M$, formam uma cobertura aberta de M, da qual extraímos uma cobertura enumerável $\mathfrak{C}_m = \{B_{m1}, B_{m2}, \ldots, B_{mn}, \ldots\}$, onde $B_{mn} = B(x_{mn}; 1/m)$. Assim, dado $m \in N$, cada ponto $x \in M$ dista menos de $1/m$ de algum dos pontos x_{mn}. Segue-se que o conjunto enumerável $E = \{x_{mn};\, m, n \in N\}$ é denso em M e portanto M é separável.

3) $\Rightarrow$ 1). Seja $E = \{x_1, \ldots, x_m, \ldots\}$ um subconjunto enumerável denso em M. Consideremos a coleção $\mathfrak{B}$ de tôdas as bolas abertas $B_{mn} = B(x_m; 1/n)$.

Evidentemente, $\mathfrak{B}$ é uma coleção enumerável de abertos em M. Além disso, dados um aberto $A \subset M$ e um ponto $x \in A$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x; \epsilon) \subset A$. Existem também um inteiro n tal que $1/n < \epsilon/2$ e um ponto $x_m \in E$ tal que $d(x, x_m) < 1/n$. Esta desigualdade mostra que $x \in B_{mn}$. Por outro lado, se $y \in B_{mn}$ então $d(y, x_m) < 1/n$ e portanto $d(y, x) \leq d(y, x_m) + d(x_m, x) < 1/n + 1/n < \epsilon$. Logo, $B_{mn} \subset B(x; \epsilon)$. Conclui-se que $x \in B_{mn} \subset A$ e portanto $\mathfrak{B}$ é uma base de M.

Escólio — *Seja E um subconjunto denso de um espaço métrico M. As bolas abertas $B(x; 1/n)$, com $x \in E$ e $n \in N$, constituem uma base de M.*

Observação — Para espaços topológicos quaisquer, nenhuma das equivalências acima subsiste.

Como conseqüência da Prop. 4, vemos que todo espaço métrico compacto tem base enumerável e que, se um espaço métrico tem base enumerável seu completamento também tem.

De agora em diante, não nos preocuparemos em estabelecer para espaços com base enumerável as propriedades dos espaços separáveis, ou vice-versa.

PROPOSIÇÃO 5 — *Sejam K um espaço métrico compacto e M um espaço métrico com base enumerável. O espaço $\mathfrak{C}(K; M)$ das aplicações contínuas $f : K \to M$, com a métrica da convergência uniforme, tem base enumerável.*

Demonstração: Para maior clareza, faremos 3 observações preliminares.

a) Na definição de espaço totalmente limitado, podemos sempre supor que os conjuntos S_i da decomposição $M = S_1 \cup \ldots \cup S_n$ são fechados, pois $\delta(\overline{S}_i) = \delta(S_i)$. Em particular, quando M é compacto, os S_i podem ser supostos compactos.

b) Seja K um espaço métrico compacto. Dada uma aplicação contínua $f : K \to M$, seja U aberto em M, com $f(K) \subset U$. Como $f(K)$ é compacto, existe $\epsilon > 0$ tal que $d(f(K), M - U) > > \epsilon$. Se $g : K \to M$ fôr outra aplicação tal que $d(f, g) < \epsilon$, então deve-se ter $g(K) \subset U$. Com efeito, dados $x \in K$ e $y \in M - U$ quaisquer, tem-se $d(f(x), y) > \epsilon$, $d(f(x), g(x)) < \epsilon$, donde $d(g(x), y) \geq d(f(x), y) - - d(f(x), g(x)) > 0$. Assim, $g(x) \neq y$ e portanto $g(K) \subset U$.

c) Seja $\mathfrak{B}$ uma base de abertos num espaço métrico M. Dados $x \in M$ e $\epsilon > 0$ arbitrário, existe um conjunto $B \in \mathfrak{B}$ com $x \in B$ e $\delta(B) < \epsilon$. Com efeito, a bola aberta de centro x e raio $\epsilon/3$ é reunião de conjuntos de $\mathfrak{B}$, os quais têm necessàriamente diâmetro $< \epsilon$. Um dêsses conjuntos contém x.

Passemos agora à demonstração. Seja $\mathfrak{B}$ uma base enumerável de M. Para cada $n \in N$ escolhamos, de uma vez por tôdas, uma decomposição $K = K_{n1} \cup \ldots \cup K_{np}$, onde $p = p(n)$ depende de n, onde cada K_{ni} é compacto e $\delta(K_{ni}) < 1/n$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Para cada $n \in N$ e cada seqüência $\sigma = (B_1, \ldots, B_p)$, $p = p(n)$, de conjuntos $B_i \in \mathfrak{B}$, indiquemos com $A(n, \sigma) = = A(K_{n1}, \ldots, K_{np}; B_1, \ldots, B_p)$ o conjunto das aplicações contínuas $f : K \to M$ tais que $f(K_{n1}) \subset B_1, \ldots, f(K_{np}) \subset B_p$. A coleção $\mathfrak{A}_n$, de todos os conjuntos $A(n, \sigma)$ obtidos mantendo n fixo e fazendo variar σ, é enumerável porque existe apenas uma quantidade enumerável de p-uplas num conjunto enumerável $\mathfrak{B}$. Segue-se que a coleção $\mathfrak{A} = \bigcup_n \mathfrak{A}_n$ de *todos* os

conjuntos $A(n, \sigma)$ é enumerável. Afirmamos que $\mathfrak{A}$ é uma base de $\mathfrak{C}(K; M)$. Em primeiro lugar, cada $A(n, \sigma)$ é aberto pois se $f \in A(n, \sigma)$ então, para cada $i = 1, \ldots, p$, tem-se $f(K_{ni}) \subset B_i$ e portanto existe $\epsilon_i > 0$ com $d(f(K_{ni}), M - B_i) > \epsilon_i$. Seja $\epsilon = \min. \{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p\}$. Se $g : K \to M$ é tal que $d(g, f) < \epsilon$, então $g(K_{ni}) \subset B_i$ para todo $i = 1, \ldots, p$, donde $g \in A(n, \sigma)$. Em seguida, devemos provar que, dada $f \in \mathfrak{C}(K; M)$ e dado $\epsilon > 0$, existe $A(n, \sigma)$ tal que $f \in A(n, \sigma) \subset B(f; \epsilon)$. Basta provar que $f \in A(n, \sigma)$ e $\delta(A(n, \sigma)) < 2\epsilon$. Ora, o compacto $f(K)$ está contido numa reunião finita de conjuntos $B \in \mathfrak{B}$, todos de diâmetro $< \epsilon$. Seja $\eta > 0$ um número de Lebesgue desta cobertura. Em virtude da continuidade uniforme de f, existe $n \in N$ tal que, na decomposição $K = K_{n1} \cup \ldots \cup K_{np}$, temos $\delta(f(K_{ni})) < \eta$ para $i = 1, \ldots, p$. Pela definição de número de Lebesgue, podemos escolher, para cada $i = 1, \ldots, p$, um conjunto $B_i \in \mathfrak{B}$, com $\delta(B_i) < \epsilon$ e tal que $f(K_{ni}) \subset B_i$. Isto define um inteiro n e uma seqüência $\sigma = (B_1, \ldots, B_p)$, $p = p(n)$, com $f \in A(n, \sigma)$. Além disso, se $g, h \in A(n, \sigma)$, para cada $x \in K$, deve-se ter $x \in K_{ni}$ para algum i, e portanto $g(x), h(x) \in B_i$, donde $d(g(x), h(x)) < \epsilon$. Logo, $d(g, h) < \epsilon$, o que mostra ser $\delta(A(n, \sigma)) \leq \epsilon < 2\epsilon$, e conclui a demonstração.

Segue-se da proposição acima que, se K é um espaço métrico compacto, então o espaço $\mathfrak{C}(K; R)$ das funções reais contínuas $f : K \to R$, com a métrica da convergência uniforme, tem base enumerável. Isto fornece uma nova demonstração de que todo espaço métrico compacto possui uma base enumerável. Com efeito, K é isométrico a um subespaço de $\mathfrak{C}(K; R)$ através da aplicação que associa a cada $k \in K$ a função real contínua $x \to d(k, x)$ definida em K. (Vide Cap. I, Ex. 15.)

EXEMPLOS

11. Se M tem base enumerável e K é compacto (sendo M e K espaços métricos) o espaço $\mathfrak{C}(M; K)$ das aplicações contínuas $f : M \to K$, com a métrica $d(f, g) = \sup. \{d(f(x), g(x)); x \in M\}$, não possui necessàriamente base enumerável. Por exemplo, $\mathfrak{C}(R; [0, 1])$ não tem base enumerável. Para mostrar isto, começamos lembrando que o conjunto das partes do conjunto Z dos números inteiros relativos é um conjunto não-enumerável $\mathfrak{P}(Z)$. Para cada parte $S \subset Z$, consideremos a função real contínua $f_S : R \to [0, 1]$ definida do seguinte modo: se $n \in S$, $f_S(n) = 1$; se n é inteiro mas não pertence a S, $f_S(n) = 0$. Entre dois inteiros consecutivos, f_S é linear. (A figura abaixo mostra o gráfico de f_S quando S é o conjunto dos números primos.) É claro que, dadas duas partes $S, T \subset Z$ com $S \neq T$, tem-se $d(f_S, f_T) = 1$. Assim, $\{f_S; S \in \mathfrak{P}(Z)\}$ é um subconjunto discreto

não-enumerável de $\mathfrak{C}(R; [0, 1])$ e por conseguinte êste espaço não possui base enumerável.

-4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

12. Se X é um conjunto infinito e M é um espaço métrico com pelo menos dois elementos, então o espaço $\mathfrak{B}(X; M)$ de tôdas as aplicações limitadas de X em M não tem base enumerável. Com efeito, sendo X infinito, o conjunto $\mathfrak{P}(X)$ das partes de X não é enumerável. Fixemos $a \neq b$, dois pontos distintos em M. Para cada parte $S \subset X$, seja $\xi_S : X \to M$ a aplicação definida por $\xi_S(x) = a$ se $x \in S$ e $\xi_S(x) = b$ se $x \notin S$. Dadas as partes $S, T \subset X$, com $S \neq T$, tem-se $d(\xi_S, \xi_T) = d(a, b)$. Segue-se que o conjunto das aplicações ξ_S, $S \in \mathfrak{P}(X)$, é um subespaço discreto não-enumerável de $\mathfrak{B}(X; M)$.

Um espaço métrico M diz-se *localmente separável* quando todo ponto $x \in M$ possui uma vizinhança separável. Isto equivale a dizer que todo ponto $x \in M$ é centro de uma bola aberta $B(x; r)$ na qual existe um subconjunto enumerável denso.

Dado um espaço localmente separável M, indicamos (para todo ponto $x \in M$) com r_x o sup. dos números $r > 0$ tais que a bola aberta $B(x; r)$ é separável:

$$r_x = \sup. \{r > 0; B(x; r) \text{ separável}\}.$$

Então, se $0 < r < r_x$, a bola $B(x; r)$ é separável. Além disso, se tomarmos uma seqüência de números r_n com $0 < r_n < r_x$ e $r_n \to r_x$, teremos $B(x; r_x) = \bigcup_n B(x; r_n)$. Logo, $B(x; r_x)$ é uma reunião enumerável de subconjuntos separáveis e portanto é separável, como se vê sem dificuldade.

Assim, para cada $x \in M$, $B(x; r_x)$ é a maior bola aberta separável contendo x.

$r_y/2$ x y r_y

LEMA — *Seja M um espaço métrico localmente separável. Dados $x, y \in M$, $d(x, y) < r_y/2$ implica $y \in B(x; r_x)$.*

Demonstração: Segue-se de $d(x, y) < r_y/2$ que $B(x; r_y/2) \subset B(y; r_y)$ e, por conseguinte, $B(x; r_y/2)$ é separável. Como r_x é o maior raio de uma bola aberta separável com centro em x, conclui-se que $r_y/2 \leq r_x$ e daí $y \in B(x; r_x)$. ∎

Lembramos que um espaço topológico X diz-se conexo quando X e $\varnothing$ são seus únicos subconjuntos simultâneamente abertos e fechados.

Proposição 6 — *Todo espaço métrico M, conexo e localmente separável, é separável.*

Demonstração: Mantendo a notação r_x acima introduzida, para cada $x \in M$ tomaremos um subconjunto $E(x)$, enumerável e denso na bola $B(x; r_x)$. Fixamos um ponto $a \in M$. Indutivamente definiremos, para cada $n \in N$, um aberto A_n e um subconjunto enumerável $E_n \subset A_n$, denso em A_n. Pomos $A_1 = B(a; r_a)$, $E_1 = E(a)$. Supondo definidos A_n, E_n com A_n aberto e E_n enumerável, denso em A_n, pomos

$$A_{n+1} = \bigcup_{x \in E_n} B(x; r_x), \quad E_{n+1} = \bigcup_{x \in E_n} E(x).$$

Evidentemente, A_{n+1} é aberto e E_{n+1} é um subconjunto enumerável denso em A_{n+1}. Em seguida definimos:

$$A = \bigcup A_n, \quad E = \bigcup E_n.$$

A é aberto em M e E é um subconjunto enumerável denso em A. Além disso, $x \in E$ implica $B(x; r_x) \subset A$. (Com efeito, $x \in E$ implica $x \in E_n$ para algum n e portanto $B(x; r_x) \subset A_{n+1} \subset A$.) Afirmamos que A é fechado em M. Com efeito, sendo E denso em A, temos $\bar{A} = \bar{E}$. Logo, dado $y \in \bar{A}$, podemos obter $x \in E$ com $d(x, y) < r_y/2$. Segue-se do lema que $y \in B(x; r_x)$ e portanto $y \in A$. Isto mostra que A é aberto e fechado em M. Como A não é vazio, tem-se $A = M$ e portanto M admite um subconjunto enumerável denso E.

Corolário — *Todo espaço métrico conexo e localmente compacto tem base enumerável.*

Com efeito, como todo espaço métrico compacto é separável, todo espaço métrico localmente compacto é localmente separável. Logo, o corolário segue-se da Prop. 6 já que, para espaços métricos, separabilidade equivale a ter base enumerável (Prop. 4).

Observação — Um espaço métrico localmente compacto, se não fôr conexo, pode não ter base enumerável, como é o caso de um espaço discreto não-enumerável. Pode-se demonstrar um resultado mais preciso do que a Prop. 6, que é o seguinte: todo espaço métrico localmente separável é soma topológica (isto é, reunião de subconjuntos abertos, dois a dois dis-

juntos) de espaços separáveis. Em particular, um espaço métrico localmente compacto só pode deixar de ter base enumerável se fôr reunião disjunta de uma infinidade não enumerável de subconjuntos abertos, cada um dos quais tem base enumerável.

Proposição 7 — *As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico localmente compacto M são equivalentes:*

1) *M tem base enumerável;*

2) *M é enumerável no infinito;*

3) *a topologia de M pode ser definida por uma métrica, em relação à qual um subconjunto $S \subset M$ é compacto se, e sòmente se, é limitado e fechado em M;*

4) *a compactificação de Alexandrov $M^* = M \cup \{\omega\}$ é metrizável.*

Demonstração: 1) $\Rightarrow$ 2) Cada ponto $x \in M$ está contido num aberto A_x cujo fecho $\overline{A}_x$ é compacto. A cobertura $M = \bigcup A_x$ possui uma subcobertura enumerável $M = \bigcup_n A_{x_n}$. (Prop. 3.) Segue-se que $M = \overline{A}_{x_1} \cup \ldots \cup \overline{A}_{x_n} \cup \ldots$ é uma reunião enumerável de subconjuntos compactos e portanto é enumerável no infinito. (Prop. 22, Cap. VII.)

2) $\Rightarrow$ 3) Sendo M enumerável no infinito, podemos escrever (Prop. 22, Cap. VII) $M = \bigcup K_n$, onde cada K_n é compacto e $K_1 \subset \text{int.}\, K_2 \subset \subset K_2 \subset \ldots \subset \text{int.}\, K_n \subset K_n \subset \text{int.}\, K_{n+1} \subset \ldots$. Em particular, K_n e $M - \text{int.}\, K_{n+1}$ são subconjuntos fechados disjuntos em M. Logo, para cada n, podemos obter uma função contínua $f_n : M \to [0, 1]$, tal que $f(K_n) = 0$ e $f(M - \text{int.}\, K_{n+1}) = 1$. Vê-se então que, se $x \in K_r$, $f_r(x) = f_{r+1}(x) = \ldots = 0$, e, se $x \notin K_{s+1}$, $f_s(x) = f_{s-1}(x) = \ldots = f_1(x) = 1$. Definamos uma função $f : M \to R$ pondo, para cada $x \in M$, $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$ Isto parece ser uma soma infinita mas, dado $x \in M$, tem-se $x \in K_n$ para algum n, donde $f_n(x) = f_{n+1}(x) = \ldots = 0$ e portanto $f(x) = f_1(x) + \ldots + f_{n-1}(x)$. Mais ainda: $x \in \text{int.}\, K_{n+1}$ e, para todo $y \in \text{int.}\, K_{n+1}$, $f(y) = f_1(y) + \ldots + f_n(y)$. Logo, f coincide com a função contínua $f_1 + \ldots + f_n$ na vizinhança aberta int. K_{n+1} do ponto x, e por conseguinte f é contínua em todos os pontos $x \in M$. Note-se que, se $x \in M - K_{n+1}$, $f_1(x) = \ldots = f_n(x) = 1$, e portanto $f(x) \geq n$. Consideremos o produto $M \times R$ com a métrica $\delta((x, t), (x', t')) = d(x, x') + |t - t'|$, onde d é a métrica de M. A aplicação $x \to (x, f(x))$ define um homeomorfismo $M \to G(f)$, onde $G(f) \subset M \times R$ é o gráfico de f. Isto significa que $\rho(x, y) = d(x, y) + |f(x) - f(y)|$ é uma métrica em M, equivalente à métrica original d. Seja $S \subset M$ um subconjunto fechado, limitado segundo a métrica ρ. Afirmamos que existe algum n tal que $S \subset K_n$.

Do contrário, para cada n, poderíamos achar um ponto $x_n \in S$ com $x_n \notin K_{n+1}$, donde $f(x_n) \geq n$. Fixando um ponto $x_0 \in K_0$, teríamos $f(x_0) = 0$ e portanto

$$\rho(x_n, x_0) = d(x_n, x_0) + |f(x_n) - f(x_0)| = d(x_n, x_0) + f_n(x_n) \geq n,$$

o que contradiz ser S limitado segundo ρ. Segue-se que S é um subconjunto fechado de um compacto K_n e portanto S é compacto.

3) $\Rightarrow$ 4) Seja ρ uma métrica em M satisfazendo à condição 3). Consideremos M imerso isomètricamente no espaço normado $E = \mathfrak{C}_0(M; R)$, das funções reais contínuas limitadas em M. (Basta escolher um ponto $x_0 \in M$ e associar a cada $x \in M$ a função $f_x : M \to R$ tal que $f_x(y) = d(x, y) - d(x_0, y)$. Vide Obser. 1, depois da Prop. 10, Cap. VI.) Assim, podemos pensar em M como subconjunto de E e, na verdade, $M \subset E - \{0\}$ pois nenhuma das funções f_x é idênticamente nula. Definamos $\varphi : E - \{0\} \to E - \{0\}$, pondo $\varphi(v) = \dfrac{v}{|v|^2}$. É claro que φ é contínua e, como $\varphi \circ \varphi =$ identidade, φ é um homeomorfismo de $E - \{0\}$ sôbre si mesmo. Afirmamos que $\varphi(M) \cup \{0\}$ é um subconjunto compacto de E. Para verificá-lo, basta provar que se uma seqüência de pontos $x_n \in M$ não possui subseqüência convergente em M, então $\varphi(x_n) \to 0$. Ora, devido à hipótese sôbre a métrica de M, se (x_n) não possui subseqüência convergente em M, deve-se ter $|x_n| \to \infty$. Conseqüentemente, $|\varphi(x_n)| = |x_n| / |x_n|^2 \to 0$. Pondo $M^* = \varphi(M) \cup \{0\}$, vemos então que M^* é uma compactificação de Alexandrov de M. Sendo um subespaço do espaço normado E, M^* é metrizável, concluindo a demonstração.

4) $\Rightarrow$ 1) Sendo um espaço métrico compacto, M^* tem base enumerável e portanto M também.

Observação — Se um espaço métrico (M, d) é tal que um subconjunto $S \subset M$ é compacto se, e sòmente se, é limitado e fechado, então M é localmente compacto pois tôda bola fechada é um subconjunto limitado e fechado de M. Além disso, M é completo, pois tôda seqüência de Cauchy sendo limitada, possui uma subseqüência convergente e portanto é, ela própria, convergente. Finalmente, M tem base enumerável, quer em virtude da proposição acima, quer notanto que, para $x_0 \in M$ fixado arbitràriamente, tem-se $M = \bigcup_{n \in N} D(x_0; n)$, reunião enumerável de espaços separáveis $D(x_0; n)$.

§ 4. O Cubo de Hilbert

Seja C o conjunto de tôdas as seqüências de números reais $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots)$ tais que $0 \leq x_i \leq 1/i$ para todo $i \in N$. Como a série

$\Sigma\, 1/i^2$ é convergente, vê-se que $\Sigma x_i^2 \leq \Sigma\, 1/i^2 < \infty$ para todo $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots) \in C$. Portanto, C é um subconjunto do espaço de Hilbert H das seqüências de quadrado somável (vide Cap. VI, Ex. 11). Considerado com a topologia induzida de H, a qual, como se sabe, é definida pela norma $|x - y| = \sqrt{\Sigma\, (x_i - y_i)^2}$, o conjunto C é um espaço métrico com base enumerável, chamado o *cubo de Hilbert.*

Mostraremos aqui que o cubo de Hilbert é um espaço métrico compacto, que é "universal" para espaços metrizáveis com base enumerável: todo espaço metrizável com base enumerável é homeomorfo a um subespaço de C.

No cubo de Hilbert C estão definidas as projeções $p_i : C \to 0, 1/i]$ onde $p_i(x) = x_i$ se $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots)$. Elas são funções reais uniformemente contínuas, pois $|p_i(x) - p_i(y)| = |x_i - y_i| \leq |x - y|$.

Dada uma aplicação $f : X \to C$, onde X é um conjunto qualquer, tem-se, para cada $x \in X$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_i(x), \ldots)$, sendo as funções $f_i = p_i \circ f : X \to [0, 1/i]$ chamadas as *coordenadas* da aplicação f. Recìprocamente, uma seqüência arbitrária de funções $f_i : X \to [0, 1/i]$ define unìvocamente, uma aplicação $f : X \to C$ tal que $f_i = p_i \circ f$ para todo $i \in N$.

Em particular, dar uma seqüência (x_n) em C equivale a dar, para cada $i \in N$, uma seqüência $(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}, \ldots)$ no intervalo $[0, 1/i]$, a qual é chamada a seqüência das *i-ésimas coordenadas* da seqüência (x_n). Evidentemente, $x_{ni} = p_i(x_n)$.

Proposição 8 — *Para que uma aplicação $f : X \to C$, de um espaço topológico arbitrário X no cubo de Hilbert C, seja contínua num ponto $a \in X$ é necessário e suficiente que cada uma de suas coordenadas $f_i = p_i \circ f : X \to [0, 1/i]$ seja uma função contínua no ponto a.*

Demonstração: Evidentemente a condição é necessária. Recìprocamente suponhamos que cada f_i é contínua no ponto a. Dado $\epsilon > 0$, como a série $\Sigma\, 1/i^2$ é convergente, existe $i_0 \in N$ tal que $\sum_{i > i_0} 1/i^2 < \epsilon^2/2$. Segue-se que $\sum_{i > i_0} |f_i(x) - f_i(a)|^2 \leq \sum_{i > i_0} 1/i^2 < \epsilon^2/2$ para todo $x \in X$. Ora, a aplicação $x \to (f_1(x), \ldots, f_{i_0}(x))$, de X em R^{i_0}, é contínua. (*Cf.* Prop. 11, Cap. III.) Logo, existe uma vizinhança V do ponto a em X tal que $x \in V$ implica $\sum_{i \leq i_0} |f_i(x) - f_i(a)|^2 < \epsilon^2/2$. Assim, para todo $x \in V$, temos

$$|f(x) - f(a)|^2 = \sum_{i \leq i_0} |f_i(x) - f_i(a)|^2 + \sum_{i > i_0} |f_i(x) - f_i(a)|^2 < \epsilon^2/2 + \epsilon^2/2 = \epsilon^2,$$

donde $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, o que prova a continuidade de f no ponto a.

Corolário — *Uma seqüência* (x_n) *no cubo de Hilbert* C *converge para um ponto* $a = (a_i) \in C$ *se, e sòmente se, para cada* $i \in N$, *a seqüência das i-ésimas coordenadas* $(x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}, \ldots)$ *converge para* a_i.

Com efeito, seja $P^* = \{0, 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$ com a topologia induzida da reta. De acôrdo com o Ex. 6, Cap. IV, e a proposição acima, as seguintes afirmações são equivalentes:

1.°) $\lim x_n = a$;

2.°) a aplicação $f : P^* \to C$, definida por $f(1/n) = x_n$, $f(0) = a$, é contínua;

3.°) para cada $i \in N$, a aplicação $f_i = p_i \circ f : P^* \to [0, 1/i]$, definida por $f_i(1/n) = x_{ni}$, $f_i(0) = a_i$, é contínua;

4.°) Para cada $i \in N$, tem-se $\lim\limits_{n} x_{ni} = a_i$.

Como se sabe, uma seqüência (x_n) num conjunto X é uma aplicação de $N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ em X. Uma subseqüência de (x_n) é a restrição dessa aplicação a um subconjunto infinito $N_1 \subset N$. Na proposição adiante, usaremos a notação $(x_n)_{n \in N_1}$ para indicar uma tal subseqüência e, anàlogamente, escreveremos $\lim\limits_{n \in N_1} x_n$ para representar o limite da mesma subseqüência. Além disso, quando dissermos "o i-ésimo elemento de N_1" nos referiremos à ordem numérica crescente natural em N_1.

Proposição 9 — *O cubo de Hilbert* C *é compacto.*

Demonstração: Pela Prop. 12, Cap. VII, basta demonstrar que tôda seqüência (x_n) em C possui uma subseqüência convergente. Ora, como o intervalo $[0, 1]$ é compacto, a seqüência $(x_{n1})_{n \in N}$ das primeiras coordenadas de (x_n) possui uma subseqüência convergente. Isto é, existe um subconjunto infinito $N_1 \subset N$ tal que $\lim\limits_{n \in N_1} x_{n1} = a_1 \in [0, 1]$. Em seguida, consideremos a subseqüência $(x_{n2})_{n \in N_1}$ da seqüência das seguintes coordenadas de (x_n). Como o intervalo $[0, 1/2]$ é compacto, existe um subconjunto infinito $N_2 \subset N_1$ tal que $\lim\limits_{n \in N_2} x_{n2} = a_2 \in [0, 1/2]$. Note-se que, como $N_2 \subset N_1$, temos também $\lim\limits_{n \in N_2} x_{n1} = a_1$. Prosseguindo anàlogamente obteremos, para cada $i \in N$, um ponto $a_i \in [0, 1/i]$ e um subconjunto infinito $N_i \subset N$ de tal modo que $\lim\limits_{n \in N_i} x_{ni} = a_i$ e $N \supset N_1 \supset \ldots \supset N_i \supset \ldots$. Definimos então um subconjunto infinito $N^* \subset N$ tomando como i-ésimo elemento de N^* o i-ésimo elemento de N_i. Para qualquer $i \in N$, então, a seqüência $(x_{ni})_{n \in N^*}$ é, a partir do seu i-ésimo têrmo, uma subseqüência de $(x_{ni})_{n \in N_i}$. Segue-se portanto que, para cada $i \in N$ tem-se $\lim\limits_{n \in N^*} x_{ni} = a_i$.

O ponto $a = (a_1, \ldots, a_i, \ldots)$ pertence ao cubo de Hilbert C e, em virtude do Corolário da Prop. 8, temos $\lim_{n \in N^*} x_n = a$, o que conclui a demonstração.

Antes de provarmos que todo espaço métrico com base enumerável pode ser homeomorfamente imerso no cubo de Hilbert, estabeleceremos o seguinte resultado elementar:

LEMA — *Seja S um subconjunto denso de um espaço métrico M. Dada uma seqüência (x_n) em M, para que se tenha $\lim x_n = x \in M$ é necessário e suficiente que $\lim d(x_n, s) = d(x, s)$ para cada $s \in S$.*

Demonstração: A necessidade é óbvia pois a distância é uma função contínua. Recìprocamente, se $\lim_{n \to \infty} d(x_n, s) = d(x, s)$ para cada $s \in S$, dado $\epsilon > 0$ podemos obter $s \in S$ tal que $d(x, s) < \epsilon/2$, pois S é denso em M. Fixando êste s vemos, em virtude da hipótese feita, que existe $n_0 \in N$ tal que $n > n_0$ implica $d(x_n, s) < \epsilon/2$. Segue-se que $n > n_0$ implica $d(x_n, x) < < d(x_n, s) + d(s, x) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$. Logo, $\lim x_n = x$.

PROPOSIÇÃO 10 — *Todo espaço métrico M com base enumerável é homeomorfo a um subespaço de cubo de Hilbert C.*

Primeira demonstração: Seja $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots\}$ um subconjunto enumerável denso em M (vide Prop. 3). Substituindo, se necessário, a métrica de M por outra equivalente, podemos supor que $d(x, y) < 1$ quaisquer que sejam $x, y \in M$. Para cada $i \in N$ seja $f_i : M \to [0, 1/i]$ a função contínua dada por $f_i(x) = \frac{1}{i} d(x, a_i)$. A aplicação $f : M \to C$, definida por $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_i(x), \ldots)$, é contínua em virtude da Prop. 8. Além disso, f é biunívoca pois $f(x) = f(y)$ implica $d(x, s) = d(y, s)$ para todo $s \in S$. Tomando uma seqüência (s_k) com $\lim s_k = x$ teremos $0 = d(x, x) = = \lim_k d(x, s_k) = \lim_k d(y, s_k) = d(y, x)$, donde $x = y$. Finalmente, para mostrar que f é um homeomorfismo de M sôbre $f(M)$, basta provar que $f(x_n) \to \to f(x)$ em $f(M)$ implica $x_n \to x$ em M. Ora, $f(x_n) \to f(x)$ significa que, para todo $i \in N$, $\lim_n f_i(x_n) = f_i(x)$; isto é, $\lim_n d(x_n, a_i) = d(x, a_i)$. O resultado segue-se, então, do lema anterior.

Segunda demonstração: Seja $\mathfrak{B} = (B_i)$ uma base enumerável de M. Para cada $i \in N$, seja $f_i : M \to [0, 1/i]$ a função contínua definida por

$$f_i(x) = \frac{1}{i} \cdot \frac{d(x, M - B_i)}{1 + d(x, M - B_i)}.$$

Temos $f_i(x) > 0$ se, e sòmente se, $x \in B_i$. A aplicação $f : M \to C$, definida por $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_i(x), \ldots)$ é contínua, em virtude da Prop. 8. Se $x \neq y$ em M, existe um aberto básico B_i com $x \in B_i$, $y \in M - B_i$. Logo, $f_i(x) > 0$, $f_i(y) = 0$ e portanto $f(x) \neq f(y)$. Segue-se que f é biunívoca. Para provar

que f é um homeomorfismo de M, sôbre $f(M)$, resta apenas mostrar qu f transforma abertos de M em abertos de $f(M)$. Como todo aberto de M é reunião de abertos básicos, a fórmula $f(\bigcup B_\alpha) = \bigcup f(B_\alpha)$ mostra que é suficiente verificar que, para cada $i \in N$, $f(B_i)$ é aberto em $f(M)$. Ora, se escrevermos $A_i = \{y \in C; y_i > 0\}$, é evidente que A_i é aberto com C. Como $f(B_i) = \bar{f}(M) \cap A_i$ [pois $x \in B_i$ se, e sòmente se, $f_i(x) > 0$], segue-se que $\bar{f}(B_i)$ é aberto em $f(M)$, o que conclui a demonstração.

§ 5. O Teorema de Metrização de Urysohn

O chamado "problema da metrização" consiste em determinar condições sôbre a topologia de um espaço X a fim de que a mesma possa ser definida por meio de uma métrica. Uma solução para êste problema, em têrmos de uma condição necessária e suficiente para a metrizabilidade de um espaço topológico X foi obtida recentemente. ("Critério de Nagata-Smirnov". Vide [Dugundji] pág. 194.) Neste parágrafo nos limitaremos a estabelecer uma condição suficiente de metrizabilidade, devida a P. Urysohn, segundo a qual todo espaço de Hausdorff normal com base enumerável é metrizável. Em particular, resulta daí que um espaço de Hausdorff compacto é metrizável se, e sòmente se, possui base enumerável. Em seguida, mostraremos que a hipótese de normalidade pode ser formalmente enfraquecida, e obteremos, por exemplo, que um espaço de Hausdorff conexo e localmente compacto é metrizável se, e sòmente se, possui base enumerável.

A demonstração do teorema de metrização de Urysohn se baseia em idéia semelhante à da imersão de um espaço métrico separável no cubo de Hilbert. O ponto crucial reside na obtenção de uma quantidade suficientemente grande de funções reais contínuas definidas num espaço normal. Tais funções são fornecidas pelo famoso "Lema de Urysohn". (Vide Prop. 20, Cap. III e considerações subseqüentes.) Antes de demonstrar êsse lema, faremos algumas observações.

Sejam X um espaço topológico e $I = [0, 1]$ o intervalo unitário da reta. Dada uma função contínua $f : X \to I$, ponhamos, para cada $t \in I$,

$$U(t) = \{x \in X; f(x) < t\}.$$

Os conjuntos $U(t)$ gozam das seguintes propriedades:

1) Cada $U(t)$ é aberto em X;

2) se $s < t$ então $\overline{U(s)} \subset U(t)$;

3) dado $x \in X$, ou $f(x) = 1$ ou existe $t \in I$ tal que $x \in U(t)$. Neste último caso, tem-se $f(x) = \inf.\{t \in I; x \in U(t)\}$.

A propriedade 1) é imediata. Quanto a 2), dados $s < t$, seja r tal que $s < r < t$. Então, o conjunto $F = \{x \in X; f(x) \leq r\}$ é fechado em X. Como $\overline{U(s)} \subset F \subset U(t)$, segue-se que $\overline{U(s)} \subset U(t)$. Finalmente, 3) equivale a afirmar que $f(x) = \inf. \{t \in I; f(x) < t\}$ quando $f(x) < 1$. Isto é óbvio.

Recìprocamente, o conhecimento de conjuntos $U(t)$ com as propriedades acima permite definir uma função contínua, como será mostrado agora.

Proposição 11 — *Sejam X um espaço topológico e D um subconjunto denso do intervalo $I = [0, 1]$. Suponhamos dado, para cada $r \in D$, um subconjunto $U(r) \subset X$, de tal modo que*

1) *cada $U(r)$ é aberto em X;*

2) *se $r < s$ então $\overline{U(r)} \subset U(s)$.*

Definamos uma função $f : X \to I$, pondo $f(x) = \inf. \{r \in D; x \in U(r)\}$ se x pertence a algum $U(r)$ e, no caso contrário, pondo $f(x) = 1$.

A função f é contínua.

Demonstração: Em primeiro lugar, notemos que a função f goza das seguintes propriedades:

a) se $x \in U(r)$ então $f(x) \leq r$;

b) se $x \notin U(r)$ então $f(x) \geq r$.

A primeira afirmação é evidente. Quanto à segunda, se fôsse $f(x) < r$, pela definição de ínfimo, existiria $s \in D$ tal que $x \in U(s)$ e $s < r$. Daí, $U(s) \subset U(r)$ e portanto teríamos $x \in U(r)$.

A fim de provar a continuidade de f num ponto arbitrário $a \in X$, seja dado $\epsilon > 0$. Obteremos vizinhanças V e W do ponto a tais que $x \in V$ implique $f(x) < f(a) + \epsilon$ e, para todo $x \in W$, se tenha $f(a) - \epsilon < f(x)$. Poremos então $U = V \cap W$. A vizinhança U de a será tal que $x \in U$ implicará $|f(x) - f(a)| < \epsilon$.

Se fôr $f(a) = 1$, poremos $V = X$. Se $f(a) < 1$ então $f(a) = \inf. \{r \in D; a \in U(r)\}$. Pela definição de inf., e sendo D denso em I, existe $r \in D$ tal que $f(a) < r < f(a) + \epsilon$. Em virtude de *b*), $a \in U(r)$ e, por causa de *a*), $x \in U(r)$ implica $f(x) \leq r < f(a) + \epsilon$. Pomos então $V = U(r)$.

Se fôr $f(a) = 0$, poremos $W = X$. Se $f(a) > 0$ então, como D é denso em I, existem $r, s \in D$ tais que $f(a) - \epsilon < r < s < f(a)$. Segue-se que $\overline{U(r)} \subset U(s)$. Ponhamos $W = X - \overline{U(r)}$. Como $f(a) > s$, tem-se $x \notin U(r)$. [Vide *a*), acima]. Logo, $a \in W$. Além disso, para todo $x \in W$, tem-se $x \notin U(r)$, donde $f(a) - \epsilon < r \leq f(x)$. [Vide *b*), acima.] Portanto, W

é uma vizinhança aberta de a tal que $x \in W$ implica $f(a) - \epsilon < f(x)$. Isto conclui a demonstração.

Lembremos que, dados dois fechados disjuntos F, G num espaço topológico X, uma *função de Urysohn* do par (F, G) é uma função contínua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in F$ e $f(x) = 1$ para todo $x \in G$.

Proposição 12 — (*Lema de Urysohn*). *Seja X um espaço normal. Todo par de subconjuntos fechados disjuntos em X possui uma função de Uryshon.*

Demonstração: Usaremos a proposição anterior. Seja D o conjunto dos racionais "diádicos" do intervalo aberto $(0, 1)$. Isto é, D é formado pelas frações $k/2^n$, com $n \in N$ e $0 < k < 2^n$. D é um subconjunto denso do intervalo fechado $[0, 1]$. Para cada $r = k/2^n \in D$, definiremos um aberto $U(r) \subset X$, de modo a serem satisfeitas as hipóteses 1) e 2) da Prop. 11. Como $F \cap G = \emptyset$, temos $F \subset X - G$. Sendo X normal, existe um aberto $U(1/2)$ tal que

$$F \subset U(1/2) \subset \overline{U(1/2)} \subset X - G.$$

(Vide lema anterior à Prop. 9, Cap. VII.) Anàlogamente, existem abertos $U(1/4)$ e $U(3/4)$ tais que

$$F \subset U(1/4) \subset \overline{U(1/4)} \subset U(1/2) \subset \overline{U(1/2)} \subset U(3/4) \subset \overline{U(3/4)} \subset X - G.$$

Prosseguindo sucessivamente com estas intercalações, obteremos, para cada número diádico $r \in D$ um aberto $U(r)$ de tal modo que $F \subset U(r) \subset \overline{U(r)} \subset$ $\subset X - G$ e $r < s$ implica $\overline{U(r)} \subset U(s)$. Segue-se que a função $f : X \to [0, 1]$, definida por $f(x) = \inf. \{r \in D; x \in U(r)\}$ para $x \in \bigcup_{r \in D} U(r)$ e $f(x) = 1$ para $x \in X - \bigcup U(r)$, é contínua. Além disso, como $F \subset U(r)$ para todo $r \in D$, temos $f(x) = 0$ para todo $x \in F$. Finalmente, como $U(r) \subset$ $\subset X - G$ para todo $r \in D$, vemos que $x \in G$ implica $x \in X - \bigcup U(r)$ e daí $f(x) = 1$. Isto encerra a demonstração.

Corolário — *Sejam F um subconjunto fechado e U um subconjunto aberto de um espaço normal X, com $F \subset U$. Existe uma função contínua $f : X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 1$ para todo $x \in F$, e $f(x) = 0$ se $x \in X - U$.*

Com efeito, basta tomar uma função de Urysohn do par de fechados disjuntos $(F, X - U)$.

Observação — A existência de uma função de Urysohn para todo par de fechados disjuntos de um espaço topológico X equivale à propriedade de X ser normal. (Vide Corolário da Prop. 20, Cap. III.)

LEMA — *Seja $\mathfrak{B}$ uma base de abertos no espaço de Hausdorff normal X. Dados $B \in \mathfrak{B}$ e um ponto $x \in B$, existe $B_1 \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B_1$ e $\overline{B}_1 \subset B$.*

Demonstração: Sendo X de Hausdorff, o ponto x é fechado. Pelo lema que antecede a Prop. 9, Cap. VII, existe um aberto U em X, tal que $x \in U$ e $\overline{U} \subset B$. Como $\mathfrak{B}$ é uma base, existe $B_1 \in \mathfrak{B}$ com $x \in B_1$ e $B_1 \subset U$, donde $\overline{B}_1 \subset \overline{U} \subset B$.

PROPOSIÇÃO 13 — (*Teorema de metrização de Urysohn*) — *Todo espaço de Hausdorff normal X, com base enumerável, é homeomorfo a um subespaço do cubo de Hilbert C. Em conseqüência, X é metrizável.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{B} = (B_n)$ uma base enumerável de X. Diremos que um par ordenado $P = (B_m, B_n)$ é *admissível* quando $\overline{B}_m \subset B_n$. Evidentemente, o conjunto dos pares admissíveis é enumerável. Escolhamos, de uma vez por tôdas, uma enumeração $(P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots)$ dos pares admissíveis. Pelo Lema de Urysohn, para cada par admissível $P_i = (B_m, B_n)$, podemos escolher uma função contínua $f_i : X \to [0, 1]$ tal que $f_i(\overline{B}_m) = 1$ e $f_i(X - B_n) = 0$. Definimos uma aplicação $f : X \to C$ pondo, para todo $x \in X$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x)/2, \ldots, f_i(x)/i, \ldots)$. Pela Prop. 8, f é contínua. Mostremos que f é biunívoca. Como X é de Hausdorff, dados $x \neq y$ em X, existe $B_n \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B_n$, $y \in X - B_n$. Pelo lema, existe um par admissível $P_i = (B_m, B_n)$, com $x \in B_m$. Segue-se que $f_i(x) = 1$ e $f_i(y) = 0$. Logo, $f(x) \neq f(y)$. Finalmente, para provar que f é um homeomorfismo de X sôbre $f(X)$, resta mostrar que f transforma abertos de X em abertos de $f(X)$. É suficiente considerar um aberto básico $B_k \in \mathfrak{B}$. Dado B_k, seja $J \subset N$ o conjunto dos índices i tais que existe um par admissível $P_i = (B_m, B_k)$, cujo segundo elemento é B_k. Note-se que, quando $i \in J$, $f_i(x) > 0$ implica $x \in B_k$, pois $f_i(X - B_k) = 0$. Para cada $i \in J$, o conjunto $A_i = \{y \in C; y_i > 0\}$ é aberto em C. Logo, $A = \bigcup_{i \in J} A_i$ também é aberto em C. Afirmamos que $f(B_k) = A \cap f(X)$. Isto mostrará que $f(B_k)$ é aberto em $f(X)$. Ora, em primeiro lugar, se $x \in B_k$, então, pelo lema, existe $B_m \in \mathfrak{B}$ tal que $x \in B_m$ e $\overline{B}_m \subset B_k$. Assim, $P_i = (B_m, B_k)$ é um par admissível, com $i \in J$ e $f_i(x) = 1$. Segue-se que $f(x) \in A_i$, donde $f(x) \in A \cap f(X)$. Isto mostra que $f(B_k) \subset A \cap f(X)$. Recìprocamente, se $f(x) \in A \cap f(X)$ então existe $i \in J$ tal que $f_i(x) > 0$ e portanto $x \in B_k$. Portanto, $A \cap f(X) \subset f(B_k)$.

COROLÁRIO — *Para que um espaço compacto de Hausdorff X seja metrizável, é necessário e suficiente que X tenha base enumerável.*

Com efeito, se X possui uma base enumerável, então X é metrizável porque todo espaço compacto de Hausdorff é normal. (Prop. 9, Cap. VII.) Recìprocamente, todo espaço métrico compacto possui uma base enumerável.

O teorema de metrização de Urysohn, conforme enunciado acima, não permite concluir diretamente, por exemplo, que um espaço de Hausdorff localmente compacto com base enumerável seja metrizável. Com efeito, em geral, um espaço localmente compacto pode não ser normal, mesmo quando satisfaz ao axioma de Hausdorff. (Vide Exerc. 63, Cap. III e Exerc. 3, Cap. VII.) Trataremos agora de eliminar essa deficiência.

Um espaço topológico X chama-se *regular* quando todo ponto $x \in X$ possui um sistema fundamental de vizinhanças fechadas.

Para que um espaço X seja *regular*, é necessário e suficiente que, dados arbitràriamente um aberto $A \subset X$ e um ponto $x \in A$, exista um aberto U tal que $x \in U$ e $\overline{U} \subset A$. Tomando $F = X - A$, vemos que X é regular se, e sòmente se, para todo fechado F em X e todo ponto $x \notin F$, existir um aberto U tal que $x \in U$ e $\overline{U} \cap F = \varnothing$.

EXEMPLOS

13. Todo espaço de Hausdorff normal X é regular. Com efeito, a condição de regularidade de X pode ainda ser expressa assim: dados um fechado $F \subset X$ e um ponto $x \notin F$, existem abertos U, V em X, com $x \in U$, $F \subset V$ e $U \cap V = \varnothing$. (Basta tomar $V = X - \overline{U}$ na última formulação do conceito de espaço regular, acima.) Como, porém, no espaço de Hausdorff X todo ponto x é um subconjunto fechado, esta condição de regularidade é um caso particular da condição de normalidade, onde um dos fechados se reduziu a um ponto. Segue-se que todo espaço de Hausdorff compacto é regular e que todo espaço métrico é regular. [Diretamente: num espaço métrico, tôda vizinhança de x contém uma bola $B(x; \epsilon)$ e $\overline{B(x; \epsilon/2)} \subset B(x; \epsilon)$.] Exist m porém espaços regulares que não são normais. (Vide Exerc. 63, Cap. III.)

14. Todo espaço de Hausdorff localmente compacto é regular. Êste é o conteúdo da Prop. 16, Cap. VII.

15. Todo subespaço S de um espaço regular X é regular. Com efeito, dado $x \in S$, uma vizinhança arbitrária de x em S tem a forma $U \cap S$, onde U é uma vizinhança de x em X. Como X é regular, existe em X uma vizinhança fechada V do ponto x, com $V \subset U$. Segue-se que $V \cap S$ é uma vizinhança fechada de x em S, com $V \cap S \subset U \cap S$. Não é verdade, porém, que todo subespaço de um espaço normal X seja normal, mesmo quando X é um espaço de Hausdorff compacto.

Proposição 14 — *Todo espaço regular X, com base enumerável, é normal.*

Demonstração: Sejam F e G subconjuntos de X, fechados e disjuntos. Para cada $x \in F$, tem-se $x \notin G$, logo, existe um aberto U_x com $x \in U_x$ e

$\bar{U}_x \cap G = \emptyset$, pois X é regular. Como X tem base enumerável, e portanto F também (Prop. 1), a cobertura $F \subset \bigcup U_x$ admite uma subcobertura enumerável $F \subset \bigcup U_n$. Da mesma maneira, existe uma subcobertura aberta enumerável $G \subset \bigcup V_n$, tal que $\bar{V}_n \cap F = \emptyset$ para todo n. Consideremos agora, para cada $n \in N$, os conjuntos abertos $A_n = U_n - (\bar{V}_1 \cup \ldots \cup \bar{V}_n)$ e $B_n = V_n - (\bar{U}_1 \cup \ldots \cup \bar{U}_n)$. Os conjuntos $A = \bigcup A_n$ e $B = \bigcup B_n$ são abertos. Tem-se $F \subset A$ e $G \subset B$. Com efeito, se $x \in F$ então $x \in U_n$ para algum n. Como porém, $\bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_n$ não contêm pontos de F, deve ser $x \in A_n$, donde $x \in A$. A inclusão $G \subset B$ é análoga. Finalmente, afirmamos que $A \cap B = \emptyset$. Para isto, deve-se mostrar que $A_m \cap B_n = \emptyset$ sejam quais forem m, $n \in N$. Por simetria, basta provar que $A_m \cap$ $\cap B_{m+p} = \emptyset$. Ora, se $x \in A_m$ então $x \in U_m$. Por outro lado, se $x \in B_{m+p}$, então $x \notin \bar{U}_1, \ldots, \bar{U}_{m+p}$ e, em particular, $x \notin U_m$. Isto conclui a demonstração.

Corolário 1 — (*Forma forte do teorema de metrização de Urysohn*) — *Todo espaço de Hausdorff regular com base enumerável é homeomorfo a um subespaço do cubo de Hilbert e portanto é metrizável.*

Corolário 2 — *Todo espaço de Hausdorff localmente compacto com base enumerável é metrizável.*

§ 6. Exercícios

1. Num espaço topológico com base enumerável, tôda base contém uma base enumerável.

2. Sejam S um subconjunto denso de um espaço topológico X e $\mathfrak{B}$ uma coleção de abertos de X tal que $\mathfrak{B}_S = \{B \cap S; B \in \mathfrak{B}\}$ é uma base de S. É $\mathfrak{B}$ necessàriamente uma base de X?

3. Um espaço de Hausdorff separável tem no máximo a potência do contínuo. Se X e Y são espaços separáveis, Y sendo de Hausdorff, o conjunto $\mathfrak{C}(X; Y)$ das aplicações contínuas de X em Y tem no máximo a potência do contínuo.

4. Sejam M um espaço métrico com base enumerável e $\mathfrak{F}$ uma coleção de subconjuntos fechados de M com a seguinte propriedade: a interseção de tôda seqüência decrescente $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$ de conjuntos $F_n \in \mathfrak{F}$ ainda pertence a $\mathfrak{F}$. Então, existe um conjunto $F \in \mathfrak{F}$ tal que nenhum subconjunto próprio de F pertence a $\mathfrak{F}$ ("Teorema da redução", de Brouwer).

5. Sejam $\mathfrak{C}(I; R)$ e $\mathfrak{C}_s(I; R)$ os espaços topológicos obtidos munindo-se o conjunto das funções contínuas $f: I \to R$, $I = [0, 1]$, com as topologias da convergência uniforme e convergência simples, respectivamente. (Vide Ex. 22, Cap. IV.) Em $\mathfrak{C}_s(I; R)$ nenhum ponto possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças. Concluir que uma topologia menos fina do que uma com base enumerável pode não ter base enumerável.

6. Num espaço métrico M, as seguintes condições são equivalentes: *a*) M tem base enumerável; *b*) todo conjunto não enumerável contém um ponto de acumulação; *c*) tôda coleção de abertos disjuntos é enumerável.

7. Um Y no plano é uma figura formada por 3 segmentos de reta com uma extremidade comum. Não existe no plano uma coleção não-enumerável de Y's disjuntos [Lembrar que, dado um compacto Y, $\mathfrak{C}(Y; R^2)$ é um espaço métrico com base enumerável, logo, todo conjunto não enumerável em $\mathfrak{C}(Y, R^2)$ contém um ponto de acumulação.]

8. Dar exemplo de um espaço de Hausdorff sem base enumerável no qual todo conjunto infinito possui ponto de acumulação.

9. Um *ponto de condensação* de um conjunto S num espaço topológico X é um ponto $x \in X$ tal que, para cada vizinhança V de x, $V \cap S$ tem o mesmo número cardinal que S. Num espaço com base enumerável, todo conjunto não enumerável contém um ponto de condensação. Substituindo "contém" por "possui" neste enunciado, basta supor que o espaço é de Lindelöf.

10. Um subconjunto aberto e uma imagem contínua de um espaço separável são espaços separáveis. O produto de dois espaços separáveis é separável. Um subconjunto fechado de um espaço separável pode não ser separável. [Vide Exerc. 15, item *b*), que se segue.]

11. Um subconjunto fechado e uma imagem contínua de um espaço de Lindelöf são espaços de Lindelöf. O produto de dois espaços de Lindelöf pode não ter esta propriedade. [Vide Exerc. 15, item *b*), que se segue.]

12. Todo espaço normal de Hausdorff é um espaço regular. Todo espaço regular de Hausdorff com a propriedade de Lindelöf é normal. Existem espaços de Hausdorff regulares (mesmo localmente compactos). que não são normais. (Vide Exerc. 63, Cap. III.) O espaço $X = \{0, 1\}$, com a topologia $\tau = \{\varnothing, \{1\}, X\}$ é normal mas não é regular.

13. Para que um subconjunto fechado F de um espaço normal X seja um G_δ (interseção enumerável de abertos) é necessário e suficiente que exista uma função contínua $f: X \to [0, 1]$ tal que $F = f^{-1}(0)$. (Se $F = \bigcap A_n$, seja, para cada n, $\varphi_n : X \to [0, 1]$ tal que $\varphi_n(F) = 0$, $\varphi_n(X - A_n) = 1$. Pôr $f(x) = \Sigma \varphi_n(x)/2^n$.) Dar exemplo de um ponto, num espaço de Hausdorff compacto, que não é um G_δ.

14. Sejam F e G subconjuntos compactos disjuntos de um espaço de Hausdorff localmente compacto X. Existe uma função contínua $f: X \to [0, 1]$ tal que $f(F) = 0$, $f(G) = 1$.

15. Consideremos as seguintes propriedades relativas a um espaço topológico X:

(*BE*) X tem base enumerável;
(*S*) X é separável;
(*L*) X é um espaço de Lindelöf;
(*C*) tôda coleção de abertos disjuntos em X é enumerável (Cantor).

Valem as implicações indicadas pelo diagrama ao lado:

S
BE C
L

Tôdas as demais implicações entre essas propriedades são falsas. Em virtude do diagrama, basta mostrar que (*S*) não implica (*L*) nem vice-versa. Isto decorre dos exemplos seguintes:

a) Seja X um conjunto não enumerável, com a topologia cujos abertos são o vazio e os complementares das partes enumeráveis de X. Vale (L) mas não (S). Também um espaço de Hausdorff compacto com a potência superior à do contínuo tem a propriedade (L) mas não (S). Por exemplo, o espaço $\mathfrak{F}(R; I)$, $I = [0, 1]$, com a topologia da convergência simples. (Vide Cap. IX.)

b) Seja X a reta, munida da topologia cuja base é formada pelos intervalos $[a, b)$, semi-abertos à direita. Êsses abertos básicos são também fechados em X, logo, X é regular. X é também um espaço de Hausdorff *E1*, separável. Vale ainda a propriedade (L) em X, donde X é normal. O produto $X \times X$ é o plano, no qual as vizinhanças básicas de um ponto (a, b) são os quadrados semi-abertos $[a, a + \epsilon) \times [b, b + \epsilon)$. $X \times X$ herda de X as propriedades de ser *E1*, separável, de Hausdorff e regular. Mas $X \times X$ não é um espaço de Lindelöf. Com efeito, a reta $y = -x$ é um subconjunto fechado, discreto e não-enumerável de $X \times X$.

16. Na parte *b*) do Exerc. 15, $X \times X$ não é um espaço normal. Com efeito, sejam $F = \{(r, -r) \in X \times X; r \text{ racional}\}$ e $G = \{(\Theta, \Theta) \in X \times X; \Theta \text{ irracional}\}$. F e G são subconjuntos fechados disjuntos de $X \times X$ mas não estão contidos em abertos disjuntos.

17. Um espaço métrico tem base enumerável se, e sòmente se, é homeomorfo a um subconjunto de um espaço métrico compacto.

18. Seja G um grupo topológico conexo. Se uma vizinhança do elemento neutro de G possui base enumerável, então G tem base enumerável.

19. Seja A um subconjunto de um espaço topológico X. Indica-se com X/A o espaço quociente de X pela relação de equivalência E_A tal que $xE_Ay \Leftrightarrow x = y$ ou $x, y \in A$. (Em outras palavras, as classes de equivalência segundo E_A são o conjunto A e os pontos de $X - A$.) Se X fôr um espaço de Hausdorff normal e A fôr fechado em X, então X/A é regular, de Hausdorff. Se A é um disco (fechado) do espaço R^n, então R^n/A é homeomorfo a R^n. [Definir uma aplicação contínua $f : R^n \to R^n$ tal que $f|(R^n - A)$ é um homeomorfismo sôbre $R^n - \{0\}$ e $f(A) = 0$.] Sejam D^n o disco unitário e S^{n-1} sua fronteira. Então, D^n/S^{n-1} é homeomorfo a S^n.

20. O *cone* sôbre um espaço topológico X é o espaço quociente $CX = (X \times I)/A$ onde $I = [0, 1]$ e $A = \{(x, 0) \in X \times I;\ x \in X\}$. Seja $\varphi : X \times I \to CX$ a aplicação quociente. O ponto $a = \varphi(A) = \varphi(x, 0)$, para todo $x \in X$, chama-se o *vértice* do cone CX. Sejam X um subespaço de um espaço normado E e $p \in E$ um ponto tal que, para $x \neq x'$ em X, os segmentos de reta $[p, x]$ e $[p, x']$ têm apenas p em comum. Indiquemos com $p * X$ a reunião dos segmentos $[p, x]$, $x \in X$. Existe uma aplicação contínua e biunívoca $f : CX \to p * X$, tal que $f(\varphi(x, t)) = (1 - t)p + tx$. Se X é compacto então f é um homeomorfismo. Um exemplo desta situação é X = fronteira de um conjunto compacto convexo K em R^n, p = ponto interior a K em R^n. Outro exemplo é: X = qualquer subconjunto de um espaço de Banach E, p = ponto que não pertence à variedade afim gerada por X. Se tomarmos X = eixo real no plano e $p = (0, 1)$ então $f : CX \to p * X$ não é um homeomorfismo.

21. Todo subconjunto compacto de um espaço métrico possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças. O eixo real é um subconjunto fechado do plano que não possui um sistema fundamental de vizinhanças. Anàlogamente, se Q é o conjunto dos números racionais, o eixo $A = \{(r, 0); r \in Q\}$ é um subconjunto fechado de $Q \times Q$

que não possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças. Dado um subconjunto fechado A de um espaço X, seja $\varphi : X \to X/A$ a aplicação quociente. O ponto $a = \varphi(A) \in X/A$ tem um sistema fundamental enumerável de vizinhanças em X/A se, e sòmente se, A tem a mesma propriedade em X.

22. Seja $A = \{(r, 0); r \in Q\} \subset Q \times Q$, Q = conjunto dos números racionais. O espaço $X = (Q \times Q)/A$ é enumerável, de Hausdorff, normal, mas não tem base enumerável. Verificar que X é um espaço de Lindelöf.

23. *a*) Seja $f : X \to Y$ uma aplicação fechada de X sôbre Y. Dados $y \in Y$ e um aberto B em X, com $f^{-1}(y) \subset B$, $f(B)$ é uma vizinhança de y.

b) Se M é um espaço métrico compacto e $f : M \to Y$ é uma aplicação contínua sôbre um espaço de Hausdorff Y, então Y é metrizável. Basta mostrar que Y tem base enumerável. Considerar uma base enumerável (B_n) de M. Dados $y \in Y$ e um aberto V em Y, existe uma reunião finita $B = B_{n_1} \cup \ldots \cup B_{n_k}$ tal que $f^{-1}(y) \subset B \subset f^{-1}(V)$. Segue-se de *a*) que $f(B)$ é uma vizinhança de y, contida em V. Os interiores dos conjuntos $f(B)$, onde B é do tipo $B_{n_1} \cup \ldots \cup B_{n_k}$, formam uma base enumerável de Y. Em outras palavras: se o espaço quociente M/E de um espaço métrico compacto M é de Hausdorff, então M/E é metrizável.

24. Sejam X, Y conjuntos linearmente ordenados. A ordem *lexicográfica* no produto $X \times Y$ é definida assim: põe-se $(x, y) < (x', y')$ quando $x < x'$ ou então quando $x = x'$ e $y < y'$. Ela torna $X \times Y$ linearmente ordenado. Lembremos que uma ordem linear num conjunto Z determina uma topologia de Hausdorff em Z que tem por base os intervalos abertos. (Vide Exerc. 14, Cap. III.) Por exemplo, a ordem natural dos números reais define no conjunto $Z = [0, 1) \cup \{2\}$ uma topologia que o torna homeomorfo ao intervalo fechado $[0, 1]$.

a) Seja X um conjunto bem ordenado, enumerável, possuindo último elemento. Sejam x_0 o primeiro elemento de X e x_∞ o último. Existe uma aplicação biunívoca $f : X \to R$ tal que $x < x' \Leftrightarrow f(x) < f(x')$. [Se X é finito, isto é óbvio. Se X é infinito, seja $X = \{x_0, x_1 \ldots, x_\infty\}$. Esta enumeração nada tem a ver com a ordem em X! (Salvo, naturalmente, quanto a x_0 e x_∞.) Tomar uma série convergente $\Sigma\, a_n = a$ de números $a_n > 0$. Definir $f : X \to R$ indutivamente. Pôr $f(x_0) = 0$. Supondo f definida para todos os x_i com $x_i < x_n$, pôr $f(x_n) = \sum_{x_i < x_n} a_i$.] Concluir que, se $J = [0,1)$, o conjunto $X \times J$, com a topologia da ordem lexicográfica, é homeomorfo ao intervalo $[0, a + 1]$.

b) A parte *a*) acima foi um preparativo para a definição da *reta transfinita*. Seja X um conjunto bem-ordenado, não-enumerável, *sem* último elemento, tal que para cada $x_0 \in X$, o segmento inicial $\{x \in X; x < x_0\}$ é enumerável. O produto cartesiano $X \times J$, com a topologia da ordem lexicográfica, é chamado a *semi-reta transfinita* L, obtida intuitivamente intercalando-se entre cada ponto $x \in S$ e seu sucessor imediato x^+ um segmento de reta cujos extremos são x e x^+. A *reta transfinita* T obtém-se tomando duas semi-retas transfinitas disjuntas e identificando-se seus pontos iniciais. [Rigorosamente, $T = (L \times \{0, 1\})/E$, onde E identifica $(\overline{x}_0, 0)$ com $(\overline{x}_0, 1)$, onde $\overline{x}_0$ é o primeiro ponto de L.] A reta transfinita T é uma variedade topológica conexa, de dimensão 1, sem base enumerável. Produtos $T \times T \times \ldots \times T$ fornecem variedades de dimensões arbitrárias sem base enumerável. Salientamos que as variedades topológicas sem base enumerável não têm maior interêsse, exceto para a obtenção de contra-exemplos. É fácil obter variedades desconexas de dimensão n, sem base enumerável. Basta considerar o produto $R^n \times X$, onde X é um espaço discreto não-enumerável.

Produtos Cartesianos Infinitos e Espaços de Funções

Capítulo IX

§ 1. Introdução

Em capítulos anteriores consideramos várias vêzes, como exemplo de um método de formação de novos espaços a partir de outros, primeiro o produto cartesiano $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ de um número finito de espaços métricos, depois o produto cartesiano $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ de um número finito de espaços topológicos. Essas construções tinham um caráter predominantemente geométrico, imitando de modo óbvio a obtenção do espaço euclidiano R^n a partir da reta R.

Consideraremos agora o produto cartesiano de uma família qualquer de espaços topológicos. Embora formalmente o produto finito seja um caso particular da situação geral que estudaremos neste capítulo, a motivação agora não é geométrica. A topologia de um produto cartesiano infinito é definida de modo a originar a convergência simples para espaços de funções. Conseqüentemente, encararemos tais produtos como espaços funcionais. Estudaremos suas propriedades gerais, condições de metrizabilidade e demonstraremos o Teorema de Tychonov, segundo o qual todo produto de espaços compactos é compacto.

Trataremos também de topologias mais finas do que a topologia produto, como a topologia da $\mathfrak{S}$-convergência e a topologia compacto-aberta. Demonstraremos o Teorema de Ascoli. Em alguns exemplos contendo aplicações dêsse teorema, são utilizados resultados clássicos de Análise real e complexa. Como sempre, tais exemplos podem ser omitidos sem prejuízo da seqüência lógica.

O capítulo termina com uma exposição da chamada "lei exponencial" que se refere à iteração de espaços de funções. O resultado crucial (Prop. 21) surgiu em conversações com o Professor E. Spanier.

§ 2. Produtos Cartesianos Quaisquer

Sejam L um conjunto de índices e $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de espaços topológicos com índices em L. Isto significa que a cada $\lambda \in L$ corresponde um espaço topológico X_λ.

Consideraremos o conjunto $X = \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$, *produto cartesiano* dos X_λ. Os elementos de X são tôdas as famílias $x = (x_\lambda)_{\lambda \in L}$ tais que, para cada $\lambda \in L$, $x_\lambda \in X_\lambda$. Em outras palavras, um ponto $x \in X$ é uma função $x : L \to \bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$, sujeita à condição de que, para qualquer $\lambda \in L$, $x(\lambda) = x_\lambda \in X_\lambda$. Os valôres $x(\lambda) = x_\lambda$ são chamados as "coordenadas" do ponto x.

No produto cartesiano $X = \prod X_\lambda$, destacam-se as *projeções* sôbre os "eixos" X_λ. Cada projeção é uma aplicação de X *sôbre* X_λ,

$$p_\lambda : X \to X_\lambda,$$

definida por $p_\lambda(x) = x_\lambda$ = λ-ésima coordenada de x. Dados $x, y \in X$, tem-se $x = y$ se, e sòmente se, $p_\lambda(x) = p_\lambda(y)$ qualquer que seja $\lambda \in L$.

EXEMPLOS

1. Se L fôr um conjunto finito, digamos $L = \{\lambda, \mu, \nu, \rho\}$, então teremos os espaços topológicos $X_\lambda, X_\mu, X_\nu, X_\rho$, cujo produto cartesiano é $X = X_\lambda \times X_\mu \times X_\nu \times X_\rho$. Os elementos de X têm 4 coordenadas. Êles são, portanto, da forma $x = (x_\lambda, x_\mu, x_\nu, x_\rho)$, onde x_λ é tomado arbitràriamente em X_λ etc. Neste caso, é mais comum substituir o conjunto L pelo conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ e escrever $X = X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ etc.

2. Se L é um conjunto infinito enumerável, é costume substituí-lo pelo conjunto $N = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$. Então, a família de conjuntos é $(X_n)_{n \in N}$ e seu produto cartesiano se escreve $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Os elementos de X são as seqüências $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots)$ onde $x_n \in X_n$.

3. Se, para todo $\lambda \in L$, X_λ é igual ao mesmo conjunto X, então $X = \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$ reduz-se ao conjunto $X^L = \mathfrak{F}(L; X)$ de tôdas as aplicações

$x : L \to X$, sendo a coordenada x_λ de x simplesmente o valor $x(\lambda)$ da aplicação x no ponto $\lambda \in L$. Quando L é infinito, vê-se que uma função $x : L \to X$ é um ponto num espaço de "infinitas dimensões", sendo cada valor $x(\lambda) = x_\lambda$ uma coordenada de x nesse espaço. Assim, todo espaço de funções é um caso particular de produto cartesiano. Por exemplo, $R^R = \mathfrak{F}(R; R) = \prod_{t \in R} R_t$, onde $R_t = R$ para todo $t \in R$. Anàlogamente, temos $R^I = \prod_{t \in I} R_t$, $I = [0, 1]$. Note-se que não estamos ainda considerando uma topologia em ΠX_λ, de modo que estas igualdades se referem apenas aos *conjuntos*.

Tendo, porém, começado por tomar os X_λ como espaços topológicos, é natural tentar introduzir uma topologia no produto cartesiano $X = \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$. O mínimo que se pode esperar de uma tal topologia é que ela torne as projeções $p_\lambda : X \to X_\lambda$ contínuas. (Isto equivale a exigir que, se uma função variável x convergir para uma função fixa x_0 então, para cada λ, $x(\lambda)$ deve convergir para $x_0(\lambda)$.)

É fácil tornar tôdas as projeções $p_\lambda : X \to X_\lambda$ contínuas. Basta tomar em X a topologia discreta. Mas é claro que uma tal escolha não tem interêsse pois equivale, em última análise, a não tomar topologia alguma em X.

Vejamos então qual a condição para que uma topologia em X torne a projeção $p_\mu : X \to X_\mu$ contínua, $\mu \in L$.

Seja U_μ um aberto em X_μ. Para que p_μ seja contínua é necessário e suficiente que $p_\mu^{-1}(U_\mu)$ seja aberto em X para tôda escolha de aberto U_μ em X_μ. Ora, $p_\mu^{-1}(U_\mu)$ é o conjunto dos pontos $x \in X$ cuja μ-ésima coordenada pertence a U_μ. Isto é, $p_\mu^{-1}(U_\mu)$ é como se fôsse o produto dos X_λ onde se substituiu X_μ por U_μ. Logo,

$$p_\mu^{-1}(U_\mu) = U_\mu \times \prod_{\lambda \neq \mu} X_\lambda = \textit{fatia de largura } U_\mu.$$

Assim, uma topologia em X torna p_μ contínua se, e sòmente se, para cada aberto $U_\mu \subset X_\mu$, a fatia $p_\mu^{-1}(U_\mu)$ é aberta em X.

Como a interseção de um número finito de abertos é um aberto, uma topologia em X que torne *tôdas* as projeções $p_\lambda : X \to X_\lambda$ contínuas deverá conter como abertos pelo menos as interseções finitas

$$p_{\lambda_1}^{-1}(U_{\lambda_1}) \cap \ldots \cap p_{\lambda_k}^{-1}(U_{\lambda_k}) = U_{\lambda_1} \times \ldots \times U_{\lambda_k} \times \prod_{\lambda \neq \lambda_i} X_\lambda, \qquad (*)$$

onde $U_{\lambda_1} \subset X_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_k} \subset X_{\lambda_k}$ são abertos. Por simplicidade, escrevemos acima $\lambda \neq \lambda_i$ para indicar que $\lambda \in L - \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Êstes conjuntos (*) são chamados os *abertos elementares* de X.

Evidentemente, a interseção de dois abertos elementares é ainda um aberto elementar. É claro também que todo ponto $x \in X$ pertence a algum aberto elementar (pois X é, êle próprio, um aberto elementar). Segue-se então da Prop. 10, Cap. III que os abertos elementares constituem a base de uma topologia τ no produto cartesiano $X = \prod X_\lambda$. Um aberto de τ é, por definição, uma reunião arbitrária de abertos elementares. Como as fatias são abertos elementares particulares, as projeções $p_\lambda : X \to X_\lambda$ são contínuas relativamente a τ. Além disso, qualquer topologia em X que tornar tôdas as projeções p_λ contínuas deverá conter pelo menos os abertos elementares e portanto conterá todos os abertos de τ. Em outras palavras, essa topologia será mais fina do que τ. Podemos pois enunciar:

Proposição 1 — *Seja $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de espaços topológicos. A topologia menos fina no produto cartesiano $X = \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$ que torna contínuas tôdas as projeções $p_\lambda : X \to X_\lambda$ é a que tem uma base formada pelos abertos elementares*

$$\overset{-1}{p_{\lambda_1}}(U_{\lambda_1}) \cap \ldots \cap \overset{-1}{p_{\lambda_k}}(U_{\lambda_k}) = U_{\lambda_1} \times \ldots \times U_{\lambda_k} \times \prod_{\lambda \neq \lambda_i} X_\lambda,$$

onde cada $U_{\lambda_1} \subset X_{\lambda_1}$ é aberto. Esta é a chamada "topologia produto".

Assim, dado $x \in \prod X_\lambda$, uma vizinhança básica V de x na topologia produto é obtida do seguinte modo: tomam-se arbitràriamente índices $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in L$, em número finito e vizinhanças V_{λ_i} de x_{λ_i} em X_{λ_i} ($i = 1, \ldots, k$). V será o conjunto dos pontos $y \in X$ tais que $y_{\lambda_1} \in V_{\lambda_1}, \ldots, y_{\lambda_k} \in V_{\lambda_k}$.

No caso em que L é um conjunto finito, digamos $L = \{1, 2, \ldots, n\}$, então uma base para a topologia produto em $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ consiste dos retângulos abertos $U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$, onde $U_1 \subset X_1$, $U_2 \subset X_2, \ldots, U_n \subset X_n$ são abertos arbitrários.

Sejam L um conjunto arbitrário e X um espaço topológico. O conjunto $X^L = \mathfrak{F}(L; X)$ de tôdas as aplicações de L em X pode, como vimos, ser considerado como o produto cartesiano $\prod_{\lambda \in L} X_\lambda$, onde $X_\lambda = X$ para cada $\lambda \in L$. A topologia produto, acima definida, chama-se então a *topologia da convergência simples* em X^L. Quando usarmos o símbolo X^L, estaremos considerando êste conjunto munido da topologia da convergência simples. O mesmo significado terá o símbolo $\mathfrak{F}_s(L; X)$. Já a notação $\mathfrak{F}(L; X)$ terá um significado neutro; significará apenas o conjunto. A topologia deverá

ser especificada em cada caso. Finalmente, se M fôr um espaço métrico, indicaremos com $\mathfrak{F}_u(L; M)$ o conjunto $\mathfrak{F}(L; M)$ com a topologia da convergência uniforme. Como se recorda (Cap. V, §4), $\mathfrak{F}_u(L; M)$ é metrizável e uma métrica compatível com sua topologia pode ser definida assim: considera-se uma métrica limitada d, uniformemente equivalente à métrica de M e, dadas $f, g : L \to M$, põe-se $\rho(f, g) = \sup. \{d(f(\lambda), g(\lambda)); \lambda \in L\}$.

A aplicação identidade $i : \mathfrak{F}_u(L; M) \to \mathfrak{F}_s(L; M)$ é contínua, isto é, a topologia da convergência uniforme é mais fina do que a topologia da convergência simples. Isto resultará da Prop. 2 a seguir, se notarmos que, para cada $\lambda \in L$ fixo, a aplicação $p_\lambda : \mathfrak{F}_u(L; M) \to M$, definida por $p_\lambda(f) = f(\lambda)$, é contínua. Podemos entretanto verificar a continuidade de i examinando diretamente as vizinhanças básicas de um elemento $f \in \mathfrak{F}(L; M)$ relativamente a essas duas topologias.

EXEMPLO

4. Dada $f : L \to M$, um sistema fundamental de vizinhanças de f em $\mathfrak{F}_s(L; M)$ é constituído pelas vizinhanças $V = V(f; \lambda_1, \ldots, \lambda_n; \epsilon) = \{g: L \to M; d(g(\lambda_i), f(\lambda_i)) < \epsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, n\}$, com $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in L$ e $\epsilon > 0$ arbitrários. Por outro lado, um sistema fundamental de vizinhanças de f em $\mathfrak{F}_u(L; M)$ é constituído pelas vizinhanças $B(f; \epsilon) = \{g : L \to M; \sup_{\lambda \in L}. d(g(\lambda), f(\lambda)) < \epsilon\}$. É claro que $B(f; \epsilon) \subset V(f; \lambda_1, \ldots, \lambda_n; \epsilon)$, o que prova que a topologia de $\mathfrak{F}_u(L; M)$ é consideràvelmente mais fina do que a de $\mathfrak{F}_s(L; M)$. Em muitos aspectos, a topologia de $\mathfrak{F}_u(L; M)$ é fina demais. Neste capítulo, consideraremos em $\mathfrak{F}(L; M)$ topologias mais finas do que $\mathfrak{F}_s$ e menos finas do que $\mathfrak{F}_u$.

É fácil verificar que, se tomarmos em cada espaço X_λ uma base $\mathfrak{B}_\lambda$ então os abertos elementares particulares obtidos como interseções finitas das fatias $p_\lambda^{-1}(U_\lambda)$, onde $U_\lambda \in \mathfrak{B}_\lambda$, ainda constituem uma base de abertos para a topologia produto em $X = \Pi X_\lambda$.

Como no caso de produtos cartesianos finitos, vale a proposição seguinte, cuja demonstração omitimos por ser, a menos de modificações evidentes, a mesma da Prop. 11 do Cap. III, no caso das afirmações *a)* e *b)*. Para *c)*, vide Ex. 21, Cap. III.

Proposição 2 — *A topologia produto em $X = \Pi X_\lambda$ possui as seguintes propriedades*:

a) As projeções $p_\lambda : X \to X_\lambda$ são contínuas e abertas.

b) Dado um espaço topológico Z, para que uma aplicação $f : Z \to X$ seja contínua num ponto $b \in Z$ é necessário e suficiente que, para cada índice λ, a aplicação $f_\lambda = p_\lambda \circ f : Z \to X_\lambda$ seja contínua no ponto b.

c) Se, para cada λ, F_λ *é um subconjunto fechado de* X_λ, *então,* $F = \prod F_\lambda$ *é fechado em* $X = \prod X_\lambda$.

OBSERVAÇÃO — Um produto $A = \prod A_\lambda$ de subconjuntos abertos $A_\lambda \subset X_\lambda$ não é, em geral, um subconjunto aberto de $X = \prod X_\lambda$. Vê-se fàcilmente que $A = \prod A_\lambda$ é aberto em X se, e sòmente se, fôr $A_\lambda \neq X_\lambda$ apenas para um número finito de valôres de λ. Esta é a diferença essencial entre os produtos cartesianos finitos e os infinitos. Em particular, o produto cartesiano de uma infinidade de espaços discretos não é um espaço discreto (salvo no caso trivial em que tais espaços, com exceção de um número finito dêles, possuem apenas um ponto).

A topologia produto em $X = \prod X_\lambda$ é caracterizada por qualquer uma das propriedades abaixo:

1) é a topologia menos fina que torna as projeções $p_\lambda : X \to X_\lambda$ contínuas;

2) uma aplicação $f : Z \to X$ é contínua se, e sòmente se, cada $f_\lambda = p_\lambda \circ f : Z \to X_\lambda$ é contínua.

Basta verificar a segunda afirmação. Seja pois, X^* o mesmo conjunto X, munido de uma topologia tal que $f : Z \to X^*$ é contínua se, e sòmente se, cada $p_\lambda \circ f : Z \to X_\lambda$ é contínua. Sejam $j : X \to X^*$ e $i : X^* \to X$ as aplicações identidades. Como cada $p_\lambda = p_\lambda \circ j : X \to X_\lambda$ é contínua, segue-se que j é contínua, em virtude da hipótese feita sôbre X^*. Anàlogamente, cada $p_\lambda : X^* \to X_\lambda$ é contínua, pois a aplicação identidade $i : X^* \to X^*$ é contínua e $p_\lambda = p_\lambda \circ i : X^* \to X_\lambda$. Como $p_\lambda = p_\lambda \circ i : X^* \to X_\lambda$, segue-se que i é contínua. Assim, $X = X^*$.

Como de costume, a parte *b*) da Prop. 2, ou seja, a segunda propriedade acima, fornece um critério de convergência para seqüências no espaço produto:

PROPOSIÇÃO 3 — *Uma seqüência* (x_n) *no espaço produto* $X = \prod X_\lambda$ *converge para um ponto* $a \in X$ *se, e sòmente se, para cada índice* λ, *tem-se* $\lim_n x_{n\lambda} = a_\lambda$, *onde* $x_{n\lambda} = p_\lambda(x_n)$ *e* $a_\lambda = p_\lambda(a)$.

Demonstração: Seja $P^* = \{0, 1, 1/2, 1/3, \ldots\}$ com a topologia induzida da reta. Definindo $f : P^* \to X$ por $f(1/n) = x_n$ e $f(0) = a$, sabemos que f é contínua se, e sòmente se, $\lim x_n = a$. Então temos: $a = \lim x_n \Leftrightarrow f$ é contínua $\Leftrightarrow$ cada $f_\lambda = p_\lambda \circ f$ é contínua $\Leftrightarrow a_\lambda = \lim x_{n\lambda}$ para cada λ (pois $f_\lambda(1/n) = x_{n\lambda}$ e $f_\lambda(0) = a_\lambda$), o que conclui a demonstração.

A Prop. 3 mostra que, no espaço $X^L = \mathfrak{F}_s(L; X)$, uma seqüência de aplicações $f_n : L \to X$ converge para uma aplicação $f : L \to X$ se, e sòmente se, para cada $\lambda \in L$, tem-se $\lim f_n(\lambda) = f(\lambda)$. Isto justifica a denominação de "topologia da convergência simples".

Note-se que a propriedade expressa pela Prop. 3 não basta para caracterizar a topologia produto em X, pois os subconjuntos abertos (ou fechados) de um espaço nem sempre podem ser descritos através de limites de seqüências. No caso geral, é necessário substituir as seqüências por *filtros* ou por *nets*. (Vide [Bourbaki], Cap. I, ou [Kelley], Cap. 2.) Mas sabemos do Cap. IV, §6, que se o espaço topológico X é um espaço $E1$ (isto é, todo ponto $x \in X$ possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças) então um subconjunto $F \subset X$ é fechado se, e sòmente se, para tôda seqüência (x_n) convergente em X, com $x_n \in F$ para todo $n \in N$, tem-se $\lim x_n \in F$. Isto mostra que a topologia de X pode ser caracterizada pelos limites de seqüências. Resta então saber em que condições um produto cartesiano $X = \Pi X_\lambda$ é um espaço $E1$.

Lembremos que um espaço topológico X diz-se *caótico* quando os únicos subconjuntos abertos de X são X e $\varnothing$. Isto equivale a dizer que, para cada $x \in X$, a única vizinhança de x é o espaço inteiro.

Proposição 4 — *Seja* $X = \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$ *um produto de espaços topológicos. Se* L *é enumerável e cada* X_λ *é um espaço* $E1$*, então* X *é um espaço* $E1$*. Recìprocamente, se* X *é um espaço* $E1$ *então cada* X_λ *é um espaço* $E1$ *e* L *é enumerável desde que nenhum* X_λ *seja caótico.*

Demonstração: Suponhamos L enumerável e que cada X_λ seja um espaço $E1$. Dado $x = (x_\lambda) \in X$, tomemos, para cada $\lambda \in L$, um sistema fundamental enumerável de vizinhanças $(V_\lambda^1, V_\lambda^2, \ldots, V_\lambda^n, \ldots)$ do ponto $x_\lambda \in X_\lambda$. Então, as interseções finitas das fatias $p_\lambda^{-1}(V_\lambda^n)$, $\lambda \in L$, $n \in N$, constituem um conjunto enumerável, o qual é evidentemente um sistema fundamental de vizinhanças de x.

Recìprocamente, seja X um espaço $E1$. Dado $x_\lambda \in X_\lambda$ arbitràriamente, seja $x \in X$ tal que $p_\lambda(x) = x_\lambda$. Seja $(V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots)$ um sistema fundamental enumerável de vizinhanças de x. Como p_λ é contínua e aberta, os conjuntos $V_{n\lambda} = p_\lambda(V_n)$ formam um sistema fundamental (enumerável) do ponto x_λ. Logo, cada X_λ é $E1$. Se nenhum X_λ é caótico, suponhamos, por absurdo, que L não seja enumerável. Para cada $\lambda \in L$, seja $x_\lambda \in X_\lambda$ um ponto que possui uma vizinhança $W_\lambda \neq X_\lambda$. Consideremos o ponto $x = (x_\lambda)$, cujas coordenadas são os x_λ assim escolhidos. Para mostrar que x não possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças, seja $V_1, \ldots, V_n, \ldots$ uma coleção enumerável qualquer de vizinhanças de x. Para cada $n \in N$, existe um aberto elementar $A_n = U_{\lambda_1} \times \times \ldots \times U_{\lambda_k} \times \prod_{\lambda \neq \lambda_i} X_\lambda$, com $x \in A_n \subset V_n$. A totalidade dos índices λ_i que comparecem na formação dos A_n é enumerável. Como estamos supondo L não-enumerável, existe $\mu \in L$, μ distinto de todos êsses λ_i. Con-

siderando a vizinhança W_μ de x_μ tal que $W_\mu \neq X_\mu$, vemos que a fatia $p_\mu^{-1}(W_\mu)$ é uma vizinhança de x em X, a qual não contém nenhum dos A_n e por conseguinte nenhum dos V_n. Segue-se que as vizinhanças V_n não constituem um sistema fundamental.

ESCÓLIO — *Se L é não-enumerável e, para cada $\lambda \in L$, todo ponto $x_\lambda \in X_\lambda$ possui uma vizinhança diferente do espaço inteiro, então nenhum ponto x do produto $X = \Pi X_\lambda$ possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças.*

COROLÁRIO — *Sejam $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ espaços E1. Introduzamos em $X = \prod_{i=1}^{\infty} X_i$ uma nova topologia e indiquemos com X^* o espaço resultante. Suponhamos que X^* seja um espaço E1 e que uma seqüência (x_n) em X^* converge para um ponto $a = (a_i)$ se, e sòmente se, para cada $i \in N$, $\lim_n x_{ni} = a_i$, onde $x_{ni} = p_i(x_n)$. Então, $X^* = X$, isto é, a topologia de X^* é a topologia produto.*

Com efeito, como X^* é um espaço *E1* e como, por hipótese, $p_i(\lim_n x_n) = \lim_n p_i(x_n)$ para cada i, segue-se que as projeções $p_i : X^* \to X_n$ são contínuas. Logo, a topologia de X^* é mais fina do que a topologia produto. Por outro lado, a aplicação identidade $\varphi : X \to X^*$ é tal que $x_n \to a$ em X implica $x_{ni} \to a_i \in X_i$ para cada i, donde, pela hipótese sôbre X^*, $x_n \to a$ em X^*. Como X é *E1* (Prop. 4), φ é contínua, isto é, a topologia de X é mais fina do que a de X^* e, finalmente, $X = X^*$.

EXEMPLO

5. Seja C o cubo de Hilbert (Cap. VIII, §4). Como conjunto, tem-se $C = \prod_{i=1}^{\infty} [0, 1/i]$. Além disso, pelo Corolário da Prop. 8, Cap. VIII, uma seqüência de pontos $x_n \in C$ converge para um ponto $a \in C$ se, e sòmente se, para cada $i \in N$, tem-se $\lim_n x_{ni} = a_i$, onde $x_{ni} = p_i(x_n)$ e $a_i = p_i(a)$. Como C é um espaço métrico, cada um dos seus pontos possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças. Segue-se então do corolário anterior que a topologia induzida no cubo de Hilbert C por sua métrica natural é a topologia produto: $C = \prod_{i=1}^{\infty} [0, 1/i]$ não sòmente como conjunto mas também como espaço topológico.

A demonstração da proposição seguinte é inteiramente análoga à da Prop. 4 e é, portanto, omitida.

PROPOSIÇÃO 5 — *Seja* $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ *uma família de espaços topológicos não-caóticos. A fim de que o produto* $X = \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$ *tenha base enumerável é necessário e suficiente que* L *seja enumerável e cada* X_λ *tenha base enumerável.*

§ 3. Metrizabilidade do Produto Cartesiano

PROPOSIÇÃO 6 — *Seja* $(M_\lambda)_{\lambda \in L}$ *uma família de espaços métricos, cada um dos quais possui pelo menos dois pontos. A topologia produto em* $M = M_\lambda$ *é metrizável se, e sòmente se,* L *é enumerável.*

Demonstração: Se M é metrizável então é, em particular, um espaço $E1$. Como cada M_λ tem mais de um ponto, nenhum dêles é caótico. Segue-se então da Prop. 4 que L é um conjunto enumerável. Recìprocamente, se L é enumerável, podemos substituí-lo por N e escrever $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$. Indiquemos com o mesmo símbolo d as métricas dos espaços M_i e ponhamos, para $x = (x_i)$ e $y = (y_i)$ quaisquer em M,

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d(x_i, y_i)}{1 + d(x_i, y_i)}.$$

É claro que a série acima sempre converge e que $d : M \times M \to R$, assim definida, é uma métrica em M. Para mostrar que d define em M a topologia produto, usaremos o Corolário da Prop. 4. Em primeiro lugar, como $d(x_i, y_i) \leq d(x, y)$; cada projeção $p_i : M \to M_i$ é uma aplicação Lipschitziana e portanto (uniformemente) contínua. Logo, $x_n \to a$ em M implica $x_{ni} \to a_i$ em M_i para cada $i \in N$. Recìprocamente, dados um ponto $a = (a_i) \in M$ e uma seqüência de pontos $x_n = (x_{n_i}) \in M$, suponhamos que $\lim_n x_{ni} = a_i$ para cada $i \in N$. Mostremos que $\lim x_n = a$ em M. Seja $\epsilon > 0$. Existe $i_0 \in N$ tal que $\sum_{i > i_0} 1/2^i < \epsilon/2$, logo,

$$\sum_{i > i_0} \frac{1}{2^i} \frac{d(x_{ni}, a_i)}{1 + d(x_{ni}, a_i)} < \frac{\epsilon}{2}$$

qualquer que seja $n \in N$. Existe também, para cada $i \leq i_0$, um inteiro n_i tal que $n > n_i$ implica $d(x_{ni}, a_i) < \epsilon/2$. Seja $n_0 = \text{máx.} \{n_1, \ldots, n_{i_0}\}$. Tem-se, para todo $n > n_0$:

$$d(x_n, a) = \sum_{i \leq i_0} \frac{1}{2^i} \frac{d(x_{ni}, a_i)}{1 + d(x_{ni}, a_i)} + \sum_{i > i_0} \frac{1}{2^i} \frac{d(x_{ni}, a_i)}{1 + d(x_{ni}, a_i)} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

concluindo a demonstração.

EXEMPLOS

6. O espaço R^R de tôdas as funções reais $f: R \to R$, com a topologia da convergência simples, não é metrizável porque é o produto de uma família não-enumerável de cópias de R. Na realidade, uma afirmação mais forte pode ser feita: nenhuma métrica pode ser introduzida no espaço das funções reais de uma variável real de modo que a noção de convergência de seqüências dela resultante seja a convergência simples. Com efeito, o fecho de um conjunto num espaço métrico é um conjunto fechado, formado pelos limites de tôdas as seqüências convergentes no espaço, cujos elementos pertencem ao conjunto dado. Se a convergência simples fôsse resultante de uma métrica, a seguinte proposição seria verdadeira:

"Dada uma seqüência de função $f_n : R \to R$ convergindo simplesmente para uma função f, se cada f_n é, por sua vez, o limite simples de uma seqüência de funções pertencentes a um conjunto $S \subset R^R$, então existe uma seqüência de funções pertencentes a S convergindo simplesmente para f."

Ora, a proposição acima é falsa, como o seguinte contra-exemplo mostra: seja $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ uma enumeração dos racionais da reta e seja f_n a função que assume o valor 1 nos pontos $r_1, \ldots, r_n$ e zero nos demais números reais. A seqüência (f_n) converge simplesmente para a função f tal que $f(x) = 1$ para x racional e $f(x) = 0$ para x irracional. Seja S o conjunto das funções contínuas de R em R. É fácil verificar que cada f_n é o limite simples de uma seqüência de funções contínuas. [Basta considerar funções cujos gráficos se compõem de triângulos isósceles com vértices nos pontos $(r_i, 1)$ e bases cada vez menores, contidas no eixo dos xx.] Por outro lado, f não é um limite simples de funções contínuas, pois é descontínua em todos os pontos da reta. (*Cf.* Prop. 15, Cap. VI.)

7. No produto cartesiano $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ de um número finito de espaços métricos $M_i = (M_i, d_i)$, as três métricas $d'(x, y) = \Sigma d(x_i, y_i)$, $d''(x,y) = \sup. \{d_i(x_i, y_i); i = 1, \ldots, n\}$ e $d(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + \ldots + d_n(x_n, y_n)^2}$ são (uniformemente) equivalentes. No caso de um produto infinito $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$, foi introduzida em M a métrica $\sum \frac{1}{2^i} \frac{d_i}{1 + d_i}$ (abreviatura evidente). Os fatôres $1/2^i$ entram nesta expressão apenas para garantir a convergência da série. Êles podem ser substituídos por qualquer seqüência (a_i) de números positivos tais que $\Sigma a_i < \infty$. Além disso, se existir uma constante $k > 0$ tal que $d_i \leq k$ para todo $i \in N$, podemos tomar simplesmente a métrica $\Sigma d_i/2^i$ no produto (ou, mais geralmente, $\Sigma a_i d_i$, com $a_i > 0$ e $\Sigma a_i < \infty$). Finalmente, como a métrica $d_i/2^i$ é (uniformemente) equivalente a d_i, podemos supor que cada d_i satisfaz a $d_i \leq 1/2^i$ e a topologia produto em $M = \Pi M_i$, pode, então, ser definida pela métrica Σd_i. Isto

mostra que a métrica por nós introduzida no espaço produto generaliza a métrica d' acima mencionada para o caso finito. As generalizações naturais das outras métricas de $M_1 \times \ldots \times M_n$ não são equivalentes a Σd_i pois não definem em $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ a topologia produto. Com efeito, a métrica sup. $\{d_i; i \in N\}$ define em $M = \mathfrak{F}(N; M)$ a topologia da convergência uniforme, enquanto que a métrica euclidiana $\sqrt{\Sigma d_i^2}$ conduz ao espaço de Hilbert H das seqüências de quadrado somável. Tem-se $H \subset R^N$, sendo fácil verificar que, em H, as topologias da convergência simples, da convergência uniforme e sua própria topologia como espaço de Hilbert são distintas uma da outra.

Salvo menção explícita em contrário, ao considerarmos como espaço métrico o produto $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$, tomaremos em M a métrica.

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d(x_i, y_i)}{1 + d(x_i, y_i)}.$$

Proposição 7 — *Sejam $M_1, \ldots, M_i, \ldots$ espaços métricos. O produto cartesiano $M = \prod M_i$ é um espaço métrico completo se, e sòmente se, cada M_i é completo.*

Demonstração: Suponhamos que cada fator M_i é completo. Dada uma seqüência de Cauchy (x_n) em M, como as projeções $p_i : M \to M_i$ são uniformemente contínuas, cada seqüência de coordenadas $(x_{ni})_{n \in N}$ é uma seqüência de Cauchy em M_i. Logo, existe para cada $i \in N$ um ponto $a_i \in M_i$ tal que $\lim_n x_{ni} = a_i$. Pondo $a = (a_i) \in M$, temos $\lim x_n = a$ (Prop. 3). Portanto, M é completo. Recìprocamente, se escolhermos arbitràriamente um ponto $a = (a_i) \in M$ então, para cada $i \in N$, a aplicação $\varphi_i : M_i \to M$, definida por $\varphi_i(x) = (a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots)$, é uma isometria de M_i sôbre um subconjunto fechado de M. Portanto, se M fôr completo, cada M_i será também completo.

Corolário — *Seja M um espaço métrico completo. Se $S = \bigcap A_i$ é a interseção de uma família enumerável de abertos $A_i \subset M$ então S é homeomorfo a um espaço métrico completo.*

Com efeito, para que cada $i \in N$ existe uma métrica d_i, compatível com a topologia de A_i, tal que (A_i, d_i) é um espaço métrico completo. (Vide Cap. VI, Ex. 8.) Em virtude da proposição anterior, o espaço métrico $A = \prod_{i=1}^{\infty} (A_i, d_i)$ é completo. A aplicação $\varphi : S \to A$, definida por $\varphi(x) = (x, x, x, \ldots)$ é um homeomorfismo de S sôbre a "diagonal" $\Delta = \{y \in A; y_1 = y_2 = \ldots\}$. Como Δ é evidentemente um subconjunto fechado de A

e, por conseguinte, um espaço métrico completo, o corolário está demonstrado.

Lembramos que uma interseção enumerável de subconjuntos abertos de um espaço métrico M chama-se um subconjunto *de tipo* G_δ em M. Assim, o corolário acima diz que todo G_δ num espaço métrico completo possui uma métrica completa (compatível com sua topologia).

EXEMPLO

8. O espaço R^N de tôdas as seqüências de números reais, com a métrica produto é, em virtude das Props. 5 e 7, um espaço métrico completo com base enumerável. (Veremos no parágrafo seguinte que R^N também é conexo.) O espaço de Hilbert H, das seqüências de quadrado somável, também goza dessas propriedades. Já vimos que a aplicação de inclusão $i : H \to R$ não é um homeomorfismo. Foi demonstrado recentemente, porém, que os espaços H e R^N são homeomorfos.

A proposição abaixo será demonstrada, com maior generalidade, no parágrafo seguinte. Sua demonstração para o caso de espaços métricos é, entretanto, mais elementar e segue exatamente as linhas da demonstração da Prop. 9 do Cap. VIII, substituindo-se apenas cada intervalo $[0, 1/i]$ pelo espaço M_i. Por isso será omitida.

Proposição 8 — *O produto cartesiano* $M = \prod_{i=1}^{\infty} M_i$ *de uma seqüência de espaços métricos compactos é um espaço métrico compacto.*

EXEMPLOS

9. Seja $I = [0, 1]$. O "cubo" I^N é um espaço métrico compacto. Note-se que I^N é homeomorfo ao cubo de Hilbert $C = \prod_{i=1}^{\infty} [0, 1/i]$ através da aplicação $h : C \to I^N$ tal que $h(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots) = (x_1, 2x_2, \ldots, ix_i, \ldots)$.

10. Tendo afirmado que o produto cartesiano de uma infinidade de espaços discretos com mais de um ponto não é um espaço discreto, examinaremos com algum detalhe um exemplo dêsse fenômeno. Inicialmente, faremos duas observações. A primeira é que, da maneira análoga à conhecida "expressão decimal" dos números reais, fixado qualquer número inteiro $b > 1$, todo número real possui uma expressão *na base* b. Por exemplo, se $0 \leq x \leq 1$, a expressão $x = 0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$ de x na base b significa que

$$x = \frac{x_1}{b} + \frac{x_2}{b^2} + \ldots + \frac{x_n}{b^n} + \ldots$$

onde, para cada n, x_n é um inteiro tal que $0 \leq x_n < b$. Nossa segunda observação é que o conjunto de Cantor K (vide Cap. VI, Exs. 21 e 24) foi definido de tal modo que os pontos de K são precisamente aquêles números $x \in [0, 1]$ tais que a sua expressão $x = 0, x_1 x_2, \ldots, x_n, \ldots$ *na base* 3 contém apenas os algarismos $x_n = 0$ e $x_n = 2$. (Isto é, nenhum x_n é igual a 1.)

Mostraremos agora que K é homeomorfo ao produto cartesiano $\{0, 2\}^N$ do espaço discreto $\{0, 2\}$ por si mesmo uma infinidade enumerável de vêzes. Para isto, basta considerar a aplicação $\varphi : \{0, 2\}^N \to K$, definida por

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = 0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}.$$

Se introduzirmos em $\{0, 2\}^N$ a métrica

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{3^n}, \quad x = (x_n), \; y = (y_n)$$

(*Cf.* Ex. 7), veremos primeiramente que φ é contínua pois $\varphi(x) = d(x, 0)$, onde $0 = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Para mostrar que φ é biunívoca, basta lembrar que, assim como a representação decimal de um número real $x \in [0, 1]$ é única, exceto por ambigüidades do tipo 0,23999... = 0,24000,..., também na base 3 os únicos números $x \in I$ que admitem duas expressões distintas são os da forma $x = 0, x_1 \ldots x_{n-1} x_n 222 \ldots = 0, x_1 \ldots x_{n-1} y_n 000 \ldots$ onde $0 \leq x_n < 2$ e $y_n = x_n + 1$. Ora, nestas condições ou $x_n = 1$ ou $y_n = 1$ e portanto as seqüências distintas $(x_1, \ldots, x_n, 2, 2, \ldots)$ e $(x_1, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots)$ não pertencem ambas a $\{0, 2\}^N$. Como φ é òbviamente sôbre K, φ é um homeomorfismo pois $\{0, 2\}^N$ é compacto. (Vide Prop. 8, citada anteriormente, e a Prop. 5 do Cap. VII.) Ora, sabemos que K não possui pontos isolados. Portanto, $\{0, 2\}^N$ goza da mesma propriedade.

10a. Como aplicação do exemplo acima, mostraremos a existência de uma *curva de Peano*, no cubo $I^n = I \times \ldots \times I$ (n fatôres), $I = [0, 1]$, para qualquer $n > 1$. Entendemos por curva de Peano, num espaço X um caminho $f : I \to X$ tal que $f(I) = X$. A existência da curva de Peano em I^n decorre das observações seguintes:

1) *Existe uma aplicação contínua $g : K \to I$, do conjunto de Cantor K sôbre o intervalo $I = [0, 1]$. Basta definir uma aplicação $\psi : \{0, 1\}^N \to I$, pondo*

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = \sum \frac{x_n}{2^n}.$$

Como todo número real $x \in [0, 1]$ possui uma expressão na base 2, ψ é sôbre $[0, 1]$. Além disso, se tomarmos em $\{0, 1\}^N$ a métrica $d(x, y) = \sum |x_n - y_n|/2^n$, veremos que $\psi(x) = d(x, 0)$, onde $0 = (0, 0, \ldots)$. Logo, ψ é contínua. Definiremos, então $g = \psi \circ j \circ \varphi$:

$$K \xrightarrow{\varphi} \{0, 2\}^N \xrightarrow{j} \{0, 1\}^N \xrightarrow{\psi} I.$$

onde j é o homeomorfismo evidente e φ é o homeomorfismo do exemplo anterior. Segue-se que existe uma aplicação contínua de K^n sôbre I^n.

2) *Para todo $n \in N$, o conjunto de Cantor K é homeomorfo a $K^n = K \times \ldots \times K$.* Com efeito podemos escrever $N = N_1 \cup \ldots \cup N_n$ onde os conjuntos N_i são infinitos e disjuntos. [Por exemplo, podemos tomar $N_i = \{p \in N$; o resto da divisão de p por n é $i\}$.] Então,

$$\{0, 2\}^N = \{0, 2\}^{N_1 \cup \ldots \cup N_n} = \{0, 2\}^{N_1} \times \ldots \times \{0, 2\}^{N_n}.$$

Òbviamente, cada espaço $\{0, 2\}^{N_i}$ é homeomorfo a K. Logo, K é homeomorfo a $K \times \ldots \times K = K^n$.

As duas observações acima já implicam que existe uma aplicação contínua $f_0 : K \to I^n$, do conjunto de Cantor sôbre o cubo I^n. A discussão completa-se então com o resultado seguinte:

3) *Tôda aplicação contínua $f_0 : K \to X$ estende-se continuamente a uma aplicação $f : I \to X$.* Com efeito, o complemento de K em I é uma reunião de intervalos abertos disjuntos, em cada uma de cujas extremidades f_0 está definida. Basta definir f linearmente em cada um dêsses intervalos de modo a coincidir com f_0 nas extremidades.

10b. Até mesmo no cubo de Hilbert C, que é um espaço de "infinitas dimensões", existe uma curva de Peano. Basta observar que C é homeomorfo a I^N; que é possível escrever $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ onde os N_n são infinitos e dois a dois disjuntos (por exemplo, $N_n = \{$números $p \in N$ tais que 2^n é a maior potência de 2 que divide $p\}$); que portanto K é homeomorfo a K^N, e usar o mesmo raciocínio acima, com K^N em vez de K^n.

Um famoso teorema, devido a Hahn e Mazurkiewicz (vide [Newman], pág. 89) afirma que existe uma curva de Peano num espaço de Hausdorff X se, e sòmente se, X é compacto, metrizável, conexo e, além disso, cada ponto $x \in X$ possui um sistema fundamental de vizinhanças conexas.

§ 4. Propriedades Gerais do Produto Cartesiano

PROPOSIÇÃO 9 — *O produto cartesiano $X = \Pi X_\lambda$ é um espaço de Hausdorff se, e sòmente se, cada fator X_λ é um espaço de Hausdorff.*

Demonstração: Se cada X_λ é um espaço de Hausdorff, dados $x \neq y$ em X, existe algum λ tal que $x_\lambda \neq y_\lambda$. Sejam U e V vizinhanças disjuntas dos pontos $x_\lambda = p_\lambda(x)$ e $y_\lambda = p_\lambda(y)$ respectivamente, no espaço X_λ. Então, $p_\lambda^{-1}(U)$ e $p_\lambda^{-1}(V)$ são vizinhanças disjuntas de x e y respectivamente, em X. Logo, X é um espaço de Hausdorff. Recìprocamente, seja X um espaço de Hausdorff. Dado um índice qualquer λ_0, escolhamos um ponto (a_λ) em X e consideremos o subconjunto

$$F = \{x \in X; \quad x_\lambda = a_\lambda \quad \text{para todo} \quad \lambda \neq \lambda_0\}.$$

A projeção $p_\lambda \colon X \to X_\lambda$ aplica F homeomorfamente sôbre X_{λ_0}. Segue-se que cada fator X_{λ_0} é um espaço de Hausdorff, por ser homeomorfo a um subespaço de X.

Como um caminho $f : I \to X_\lambda$ num espaço produto é simplesmente uma família $f = (f_\lambda)$ de caminhos $f_\lambda : I \to X_\lambda$, vê-se imediatamente que o produto X_λ é conexo por caminhos se, e sòmente se, cada fator X_λ o é. Assim, por exemplo, é conexo por caminhos o espaço R^R de tôdas as funções reais de uma variável real, com a topologia da convergência simples. Consideremos agora o caso geral do produto de espaços conexos. Inicialmente, trataremos o caso finito.

PROPOSIÇÃO 10 — *O produto cartesiano $X = X_1 \times \ldots \times X_n$ é conexo se, e sòmente se, cada fator X_i é conexo.*

Demonstração: Como cada projeção $p_i : X \to X_i$ é contínua e sôbre X_i, se X fôr conexo cada X_i o será. Recìprocamente, suponhamos que cada fator seja conexo. Basta considerar o caso de um produto $X \times Y$ de dois fatôres. Tomemos um ponto $(a, b) \in X \times Y$ e mostremos que a componente conexa C do ponto (a, b) contém qualquer outro ponto $(x, y) \in$ $\in X \times Y$. Com efeito, os conjuntos $a \times Y$ e $X \times y$ são homeomorfos a Y e X respectivamente, e têm em comum o ponto (a, y). Logo, a reunião $Z = (a \times Y) \cup (X \times y)$ é conexa (Prop. 30, Cap. III). Como $(a, b) \in Z$, segue-se que $Z \subset C$. Em particular, $(x, y) \in C$, o que conclui a demonstração.

PROPOSIÇÃO 10a — *O produto cartesiano $X = \Pi X_\lambda$ é conexo se, e sòmente se, cada fator X_λ é conexo.*

Demonstração: Se X fôr conexo, cada $X_\lambda = p_\lambda\,(X)$ também o será. Recìprocamente, se cada X_λ fôr conexo, fixando arbitràriamente um ponto

$a = (a_\lambda) \in X$, vemos que, para todo conjunto finito $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de índices, o subconjunto $X_{\lambda_1} \times \ldots \times X_{\lambda_n} \times \prod_{\lambda \neq \lambda_i} a_\lambda = \{x \in X; x_\lambda = a_\lambda, \lambda \neq \lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ contém a e é conexo pois é evidentemente homeomorfo ao produto $X_{\lambda_1} \times \ldots \times X_{\lambda_n}$ (vide proposição anterior). A reunião de todos êsses conjuntos, obtida ao escolher-se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de tôdas as maneiras possíveis, é pois um conjunto conexo $Z = \{x \in X; x_\lambda = a_\lambda$ exceto para um número finito de valôres de $\lambda\}$. (*Cf.* Prop. 30, Cap. III.) Conseqüentemente $\overline{Z}$ é conexo e a proposição ficará demonstrada se observarmos que $\overline{Z} = X$ pois é claro que todo aberto elementar $U_{\lambda_1} \times \ldots \times U_{\lambda_n} \times \prod_{\lambda \neq \lambda_i} X_\lambda$ contém algum ponto de Z.

Corolário 1 — *No produto cartesiano $X = \prod X_\lambda$, as componentes conexas são os produtos $\prod C_\lambda$, onde cada C_λ é uma componente em X_λ.*

Em primeiro lugar, cada produto de componentes C_λ é um subconjunto conexo de X, em virtude da proposição anterior. Além disso, $\prod C_\lambda$ é um conexo máximo pois se existisse em X um subconjunto conexo S contendo $\prod C_\lambda$ pròpriamente, tomando $x \in S - \prod C_\lambda$, existiria um índice μ tal que $p_\mu(x) \in p_\mu(S) - C_\mu$. Mas $p_\mu(S)$ é conexo em X_μ. Uma contradição. Finalmente, como X é a reunião dos produtos $\prod C_\lambda$, segue-se que estas são as componentes conexas de X.

Em particular, vemos que todo produto cartesiano de espaços totalmente desconexos é totalmente desconexo. ...

Corolário 2 — *Para que o produto cartesiano $X = \prod X_\lambda$ seja localmente conexo, é necessário e suficiente que todos os fatôres X_λ sejam localmente conexos e, com exceção de um número finito dêles, todos sejam conexos.*

Se X é localmente conexo então, como cada projeção $p_\lambda : X \to X_\lambda$ é uma aplicação contínua e aberta de X sôbre X_λ, os fatôres X_λ são localmente conexos. Além disso, tomando-se um ponto $x \in X$ e uma vizinhança conexa $V \ni x$, observamos que, exceto para um número finito de índices λ, temos $p_\lambda(V) = X_\lambda$. (Basta lembrar que V contém um aberto elementar.) Logo, X_λ é conexo, salvo para um número finito de valôres de λ. Recìprocamente, para demonstrar a suficiência da condição, sejam $x \in \prod X_\lambda$ e V uma vizinhança de x. Existe um aberto elementar $A = U_{\lambda_1} \times \ldots \times U_{\lambda_n} \times \prod_{\lambda \neq \lambda_i} X_\lambda$ com $x \in A \subset V$. Como cada X_λ é localmente conexo, existe, para cada $i = 1, \ldots, n$ um aberto conexo W_{λ_i} tal que $x_{\lambda_i} \in W_{\lambda_i} \subset U_{\lambda_i}$. Entre os X_λ, $\lambda \neq \lambda_i$, existe no máximo um número finito que não são conexos; sejam $X_{\lambda_{n+1}}, \ldots, X_{\lambda_m}$. Mas êstes são localmente conexos. Logo, podemos achar para cada $i = n + 1, \ldots, m$, um aberto $W_{\lambda_i} \subset X_{\lambda_i}$, conexo, com $x_{\lambda_i} \in W_{\lambda_i}$. Segue-se então da proposição an-

terior que $B = W_{\lambda_1} \times \ldots \times W_{\lambda_m} \times \prod_{\lambda \neq \lambda_i} X_\lambda$ é uma vizinhança de x conexa e tal que $x \in B \subset V$. Isto conclui a demonstração do corolário.

EXEMPLOS

11. O círculo $S^1 = \{(x, y) \in R^2; x^2 + y^2 = 1\}$ é conexo (por caminhos) pois é a imagem do intervalo $[0, 2\pi]$ pela aplicação contínua $f(t) = e^{it}$. Segue-se então que o toro $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ (n fatôres) é conexo (por caminhos).

12. O produto de uma infinidade de espaços localmente conexos pode não ser localmente conexo. Tal é o caso do espaço $\{0, 2\}^N$ que é produto de uma infinidade de cópias do espaço localmente conexo $\{0, 2\}$, mas não é localmente conexo pois é homeomorfo ao conjunto de Cantor. (Vide Ex. 10.)

Examinaremos agora a compacidade de um produto cartesiano, a qual é estabelecida pelo Teorema de Tychonov, em cuja demonstração intervém o princípio da Teoria dos Conjuntos conhecido como *Teorema de Zorn*. Lògicamente, o Teorema de Zorn é equivalente ao Axioma da Escolha, o qual já utilizamos inúmeras vêzes nos capítulos anteriores, sem maiores cuidados em explicitá-lo ou tecer comentários a seu respeito, dentro do princípio que adotamos, de assumir uma atitude "ingênua" em relação às questões de Lógica e Teoria dos Conjuntos.

Entretanto, apesar dessa equivalência lógica entre o Axioma da Escolha e o Teorema de Zorn, o primeiro possui um caráter "evidente" intuitivamente, isto é, pode ser fàcilmente aceito, exceto por pessoa com senso crítico altamente sofisticado. Por outro lado, o segundo se apresenta sob um aspecto mais matemático, de um verdadeiro teorema, em contraste com a forma um tanto filosófica do Axioma da Escolha.

Para o enunciado do Teorema de Zorn, vide o Cap. 0.

Diz-se que uma coleção $\mathfrak{F}$ de subconjuntos de um conjunto X goza da *propriedade da interseção finita* quando a interseção $F_1 \cap \ldots \cap F_n$ de um número finito qualquer de elementos $F_1, \ldots, F_n$ pertencentes a $\mathfrak{F}$ é não-vazia.

Diremos que uma coleção $\mathfrak{M}$ de subconjuntos de X é *máxima* com a propriedade da interseção finita de tôda coleção de partes de X que contém $\mathfrak{M}$ e goza da propriedade da interseção finita coincide necessàriamente com $\mathfrak{M}$. Isto equivale a dizer que se $S \subset X$ é tal que $S \cap M \neq \varnothing$ para todo $M \in \mathfrak{M}$ então $S \in \mathfrak{M}$.

Se uma coleção $\mathfrak{M}$ de partes de X é máxima com a propriedade da interseção finita então, dados $F_1, \ldots, F_n \in \mathfrak{M}$ deve-se ter $F_1 \cap \ldots \cap F_n \in \mathfrak{M}$.

Com efeito, em virtude da propriedade da interseção finita, $(F_1 \cap \ldots \cap F_n) \cap \cap M \neq \emptyset$ para todo $M \in \mathfrak{M}$. Anàlogamente, se $M \in \mathfrak{M}$, tem-se ainda $\overline{M} \in \mathfrak{M}$.

A fim de demonstrar a compacidade do produto de espaços compactos, usaremos, além do axioma da escolha, a seguinte conseqüência do Teorema de Zorn.

Lema — *Seja $\mathfrak{F}$ uma coleção de partes de um conjunto X, com a propriedade da interseção finita. Existe uma coleção $\mathfrak{M}$ de partes de X, máxima com a propriedade da interseção finita e contendo $\mathfrak{F}$.*

Demonstração: Seja P o conjunto de tôdas as coleções $\mathfrak{P}$ de partes de X que contêm $\mathfrak{F}$ e gozam da propriedade da interseção finita. Consideremos P ordenado pela relação da inclusão. Vê-se sem dificuldade que, dado um conjunto linearmente ordenado de coleções de partes de X, cada uma delas em P, a reunião dessas coleções ainda pertence a P. Assim, P é indutivo superiormente. Pelo Teorema de Zorn, existe em P um elemento máximo $\mathfrak{M}$, o que demonstra o lema.

Sabemos que um espaço topológico X é compacto se, e sòmente se, tôda coleção de subconjuntos fechados de X, com a propriedade da interseção finita, tem interseção não-vazia.

Proposição 11 — (*Teorema de Tychonov*) — *O produto cartesiano $X = \Pi X_\lambda$ é compacto se, e sòmente se, cada fator X_λ é compacto.*

Demonstração: Como cada X_λ é a imagem de X pela aplicação contínua $p_\lambda : X \to X_\lambda$, se X fôr compacto, cada X_λ o será também. Recìprocamente, seja cada X_λ compacto. Consideremos uma família $\mathfrak{F}$ de subconjuntos fechados de X, com a propriedade da interseção finita. Devemos achar um ponto $x \in X$ que pertença a todos os conjuntos de $\mathfrak{F}$. Usando o lema, obtemos uma coleção $\mathfrak{M}$ de partes de X, contendo $\mathfrak{F}$ e máxima em relação à propriedade da interseção finita. (Os conjuntos pertencentes a $\mathfrak{M}$ não são necessàriamente fechados.) Para cada índice λ, a coleção $p_\lambda(\mathfrak{M}) = \{p_\lambda(M); M \in \mathfrak{M}\}$ das projeções de todos os conjuntos $M \in \in \mathfrak{M}$ tem a propriedade da interseção finita, pois $p_\lambda(M_1) \cap \ldots \cap p_\lambda(M_n) \supset \supset p_\lambda(M_1 \cap \ldots \cap M_n)$. Segue-se que os fechos $\overline{p_\lambda(M)}$, $M \in \mathfrak{M}$, formam uma coleção de subconjuntos fechados de X_λ, com a propriedade da interseção finita. Como X_λ é compacto, existe um ponto $x_\lambda \in X_\lambda$ que pertence ao fecho de $p_\lambda(M)$, para todo $M \in \mathfrak{M}$. Seja $x = (x_\lambda)$ o ponto de X que possui como coordenadas os x_λ assim obtidos. Mostremos que $x \in \overline{M}$ para todo $M \in \mathfrak{M}$ e daí decorrerá que $x \in F$ para todo $F \in \mathfrak{F}$. Ora, qualquer que seja a fatia aberta $p_\lambda^{-1}(U)$ contendo x, U é um aberto de X_λ contendo x_λ, portanto, $U \cap p_\lambda(M) \neq \emptyset$ para todo $M \in \mathfrak{M}$ e daí $p_\lambda^{-1}(U) \cap$

$\cap M \neq \emptyset$ para todo $M \in \mathfrak{M}$. Segue-se então que tôda fatia aberta $p_\lambda^{-1}(U)$ contendo x pertence à coleção $\mathfrak{M}$ e, por conseguinte, todo aberto elementar contendo x, como interseção finita de fatias abertas que contêm x, também pertence a $\mathfrak{M}$ e portanto, tem interseção não-vazia com todo conjunto $M \in \mathfrak{M}$. Assim, $x \in \overline{M}$ para todo $M \in \mathfrak{M}$, como queríamos demonstrar.

Corolário — *O produto cartesiano $X = \Pi X_\lambda$ é localmente compacto se, e sòmente se, os fatôres X_λ são compactos, exceto um número finito dêles, os quais são localmente compactos.*

Se X é localmente compacto, tomamos um ponto $x \in X$ e uma vizinhança compacta $V \ni x$. Como cada projeção $p_\lambda : X \to X_\lambda$ é uma aplicação contínua aberta, vemos que $p_\lambda(V)$ é uma vizinhança compacta de x_λ em X_λ. Isto mostra que cada X_λ é localmente compacto e, como $p_\lambda(V) = X_\lambda$ exceto para um número finito de valôres de λ, vemos também que existe no máximo um número finito de fatôres X_λ que não são compactos. Para demonstrar a recíproca, tomamos um ponto arbitrário $x \in \Pi X_\lambda$. Sejam $X_{\lambda_1}, \ldots, X_{\lambda_n}$ os únicos X_λ não-compactos. Para cada $i = 1, \ldots, n$, tomemos uma vizinhança compacta V_{λ_i} de x_{λ_i} em X_{λ_i}. Então, $V_{\lambda_1} \times \ldots \times V_{\lambda_n} \times \prod_{\lambda \neq \lambda_i} X_\lambda$ é uma vizinhança compacta de x em X, concluindo a demonstração do corolário.

§ 5. Convergência Uniforme numa Família de Partes

Sejam X um conjunto arbitrário e M um espaço métrico. Conforme foi convencionado no § 2, indicaremos com $\mathfrak{F}(X; M)$ o conjunto das aplicações de X em M, enquanto que $\mathfrak{F}_s(X; M)$ e $\mathfrak{F}_u(X; M)$ indicarão respectivamente os espaços topológicos obtidos munindo-se $\mathfrak{F}(X; M)$ da topologia da convergência simples, e da topologia da convergência uniforme.

Vimos no Cap. V, § 4, que $\mathfrak{F}_u(X; M)$ é metrizável. Por outro lado, foi mostrado acima que $\mathfrak{F}_s(X; M)$ não é metrizável, a menos que X seja enumerável ou que M se reduza a um ponto. Sabemos também que a convergência no espaço $\mathfrak{F}_u(X; M)$ significa convergência uniforme de aplicações $f_n : X \to M$ e que a convergência em $\mathfrak{F}_s(X; M)$ significa convergência simples de aplicações $f_n : X \to M$.

Seja agora $\mathfrak{S}$ uma coleção de subconjuntos $S \subset X$. Definiremos em $\mathfrak{F}(X; M)$ uma topologia, que chamaremos a *topologia da convergência uniforme nas partes de* $\mathfrak{S}$. O espaço resultante será indicado com $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$ e a convergência $f_n \to f$, de pontos nesse espaço, significará que $f_n \to f$ uniformemente em cada $S \in \mathfrak{S}$. (Vide Cap. IV, § 4.)

Recordemos inicialmente que, dados um conjunto X, um espaço topológico Y e uma aplicação $\varphi : X \to Y$, a topologia induzida por φ no con-

junto X é formada pelos abertos $\varphi^{-1}(A)$, onde A é um aberto arbitrário de Y. Esta é a topologia menos fina que se pode introduzir em X de modo a tornar φ contínua. Ela é caracterizada pelo fato de que uma aplicação $f: Z \to X$, de um espaço topológico arbitrário Z em X, é contínua se, e sòmente se, a aplicação composta $\varphi \circ f : Z \to Y$ fôr contínua. Em particular, uma seqüência de pontos $x_n \in X$ converge para um ponto $x \in X$ se, e sòmente se, $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ em Y. É fácil verificar que, sendo Y um espaço de Hausdorff, a topologia induzida por φ em X é de Hausdorff se, e sòmente se, φ fôr biunívoca. Quando é biunívoca, φ é um homeomorfismo de X sôbre o subespaço $\varphi(X)$ de Y. Finalmente, dado $x \in X$, se $\varphi(x) = y$ e se $\mathfrak{V}(y)$ é um sistema fundamental de vizinhanças de y e Y, então os conjuntos $\varphi^{-1}(V)$, $V \in \mathfrak{V}(y)$, formam um sistema fundamental de vizinhanças na topologia induzida por φ em X.

Consideremos agora a família de espaços topológicos $(\mathfrak{F}_u(S; M))_{S \in \mathfrak{S}}$ e o espaço produto cartesiano

$$Y = \prod_{S \in \mathfrak{S}} \mathfrak{F}_u(S; M).$$

A aplicação $\varphi : \mathfrak{F}(X; M) \to Y$, definida por $\varphi(f) = (f|S)_{S \in \mathfrak{S}}$, onde $f|S$ é a restrição de $f: X \to M$ a S, induz em $\mathfrak{F}(X; M)$ uma topologia. O espaço topológico resultante será indicado com $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$.

Resulta imediatamente desta definição que $f_n \to f$ em $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$ se, e sòmente se, $f_n|S \to f|S$ uniformemente, para cada $S \in \mathfrak{S}$. (*Cf.* Prop. 3.)

Examinemos como são as vizinhanças de uma aplicação $f: X \to M$ na topologia do espaço $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$.

Em primeiro lugar, dado $S \in \mathfrak{S}$, um sistema fundamental de vizinhanças de uma aplicação $h \in \mathfrak{F}_u(S; M)$ é formado pelos conjuntos abaixo, onde $\epsilon > 0$ é arbitrário:

$$\begin{aligned} V(h; \epsilon) &= \{k : S \to M; d(h, k) < \epsilon\} = \\ &= \{k : S \to M; \sup_{x \in S} d(h(x), k(x)) < \epsilon\}. \end{aligned}$$

Logo, podemos obter um sistema fundamental de vizinhanças de um ponto $h = (h_S)_{S \in \mathfrak{S}}$ em $Y = \prod_S \mathfrak{F}_u(S; M)$ considerado os abertos elementares:

$$V(h; S_1, \ldots, S_n, \epsilon) = \{k = (k_S) \in Y; d(h_{S_i}, k_{S_i}) < \epsilon, i = 1, \ldots, n\},$$

onde $S_1, \ldots, S_n \in \mathfrak{S}$ são arbitrários e $\epsilon > 0$ também. (A rigor, deveríamos tomar $\epsilon_1 \ldots, \epsilon_n$, mas é claro que $\epsilon = \min.\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$ também dá origem a um sistema fundamental de vizinhanças de h em Y.)

Finalmente, concluímos que, dada $f : X \to M$, um sistema fundamental de vizinhanças de f no espaço $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$ é formado pelos conjuntos da forma

$$V(f; S_1, \ldots, S_n, \epsilon) = \{g : X \to M; d(g|S_i, f|S_i) < \epsilon, i = 1, \ldots, n\}$$

onde $S_1, \ldots, S_n \in \mathfrak{S}$ e $\epsilon > 0$ são arbitrários e $d(g|S, f|S) = \sup_{x \in S} \{d(g(x), f(x))\}$.

É imediato que:

1) $S = S_1 \cup \ldots \cup S_n$ implica $V(f; S_1, \ldots, S_n, \epsilon) = V(f; S, \epsilon)$;

2) $T \subset S$ implica $V(f; S, \epsilon) \subset V(f; T, \epsilon)$.

Resulta daí que, indicando com $\mathfrak{S}^*$ a coleção formada por tôdas as reuniões finitas $S_1 \cup \ldots \cup S_n$ de elementos $S_i \in \mathfrak{S}$ e mais tôdas as partes $T \subset S$ de elementos $S \in \mathfrak{S}$, temos $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M) = \mathfrak{F}_{\mathfrak{S}^*}(X; M)$. A coleção $\mathfrak{S}^*$ será chamada o *saturamento* de $\mathfrak{S}$ e diremos que $\mathfrak{S}$ é *saturada* quando $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{S}$.

Por conseguinte, não há perda de generalidade em supor sempre que $S_1, \ldots, S_n \in \mathfrak{S}$ implica $S_1 \cup \ldots \cup S_n \in \mathfrak{S}$ e que $S \in \mathfrak{S}$ implica $T \in \mathfrak{S}$ para todo $T \subset S$. Isto será admitido, implìcitamente, sempre que houver conveniência. Quando $\mathfrak{S}$ contém as reuniões finitas de seus elementos, um sistema fundamental de vizinhanças de um ponto $f \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$ é simplesmente formado pelas vizinhanças $V(f; S, \epsilon)$, $S \in \mathfrak{S}$, $\epsilon > 0$.

Como o produto cartesiano $Y = \prod_S \mathfrak{F}_u(S; M)$ é um espaço de Hausdorff, a topologia em $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$ será de Hausdorff se, e sòmente se, a aplicação $\varphi : \mathfrak{F}(X; M) \to Y$, definida por $\varphi(f) = (f|S)_{S \in \mathfrak{S}}$, fôr biunívoca. É fácil de ver que isto acontece se, e sòmente se, $X = \bigcup_{S \in \mathfrak{S}} S$, isto é, cada ponto $x \in S$ pertence a algum $S \in \mathfrak{S}$. Podemos então enunciar:

PROPOSIÇÃO 12 — *$\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$ é um espaço de Hausdorff se, e sòmente se, $\mathfrak{S}$ é uma cobertura de X.*

EXEMPLO

13. Como casos particulares, temos:

a) A topologia da convergência simples: $\mathfrak{F}_s(X; M) = \mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$ quando $\mathfrak{S}$ é a coleção das partes finitas de X ou, equivalentemente, quando os elementos de $\mathfrak{S}$ são as partes de X que se reduzem a um ponto.

b) A topologia da convergência uniforme: $\mathfrak{F}_u(X; M) = \mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$ quando $\mathfrak{S}$ é o conjunto de tôdas as partes de X ou, equivalentemente, quando $\mathfrak{S}$ consiste do único elemento X.

c) A topologia da convergência uniforme nas partes compactas: quando X é um espaço topológico e $\mathfrak{S}$ é a coleção das partes compactas de X. Escreve-se, neste caso, $\mathfrak{F}_c(X; M)$, em vez de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$. Quando X é um espaço de Hausdorff, tem-se $\mathfrak{F}_c(X; M) = \mathfrak{F}_{\mathfrak{S}_1}(X; M)$, onde $\mathfrak{S}_1$ é a coleção das partes relativamente compactas de X. Com efeito, neste caso $\mathfrak{S}_1$ é formada por todos os subconjuntos dos elementos $S \in \mathfrak{S}$. Quando X é compacto, $\mathfrak{F}_c(X; M) = \mathfrak{F}_u(X; M)$.

d) A topologia da convergência uniforme nas partes limitadas: quando X fôr um espaço métrico e $\mathfrak{S}$ fôr a coleção das partes limitadas de X. Escreve-se então $\mathfrak{F}_b(X; M) = \mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$. No caso de $X = R^n$, temos $\mathfrak{F}_b(R^n; M) = \mathfrak{F}_c(R^n; M)$, pois um subconjunto do R^n é limitado se, e sòmente se, é relativamente compacto.

Indicaremos com $\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}(X; M)$ o subespaço de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$ formado pelas aplicações contínuas $f : X \to M$, do espaço topológico X no espaço métrico M. O símbolo $\mathfrak{C}(X; M)$ indicará apenas o conjunto das aplicações contínuas de X em M, enquanto $\mathfrak{C}_s(X; M) \subset \mathfrak{F}_s(X; M)$, $\mathfrak{C}_u(X; M) \subset \mathfrak{F}_u(X; M)$, e $\mathfrak{C}_c(X; M) \subset \mathfrak{F}_c(X; M)$ indicarão os subespaços correspondentes.

Proposição 13 — *Sejam X um espaço topológico e M um espaço métrico. Dada uma coleção $\mathfrak{S}$ de partes de X, se os interiores dos conjuntos $S \in \mathfrak{S}$ cobrem X então $\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}(X; M)$ é um subconjunto fechado de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$.*

Demonstração: Em primeiro lugar, observemos que $\mathfrak{C}_u(X; M)$ é um subconjunto fechado de $\mathfrak{F}_u(X; M)$, em virtude da Prop. 17, do Cap. III e do fato de que $\mathfrak{F}_u(X; M) = \mathfrak{B}(X; M)$ para uma conveniente métrica de M (*cf.* Corol. 5, Prop. 3, Cap. V). Assim, para cada $S \in \mathfrak{S}$, $\mathfrak{C}_u(S; M)$ é um subconjunto fechado de $\mathfrak{F}_u(S; M)$ e portanto $D = \prod_S \mathfrak{C}_u(S; M)$ é um subconjunto fechado de $Y = \prod_S \mathfrak{F}_u(S; M)$. Segue-se que $\varphi^{-1}(D)$ é um subconjunto fechado de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$, onde $\varphi : \mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M) \to Y$ é definida por $\varphi(f) = (f|S)_{S \in \mathfrak{S}}$. Ora, $\varphi^{-1}(D)$ é o conjunto das aplicações $f : X \to M$ tais que $f|S$ é contínua, para cada $S \in \mathfrak{S}$. Como cada ponto $x \in S$ pertence ao interior de algum $S \in \mathfrak{S}$, segue-se que $f : X \to M$ é contínua se, e sòmente se, $f|S$ é contínua par cada $S \in \mathfrak{S}$. Assim, $\varphi^{-1}(D) = \mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}(X; M)$, o que conclui a demonstração.

Corolário — *Se X fôr localmente compacto, então $\mathfrak{C}_c(X; M)$ será um subconjunto fechado de $\mathfrak{F}_c(X; M)$.*

A Prop. 13 corresponde ao fato de que o limite de uma seqüência localmente uniformemente convergente de aplicações contínuas é ainda uma aplicação contínua. (*Cf.* Ex. 19, Cap. IV.)

Por outro lado, $\mathfrak{C}_s(X; M)$ não é, salvo em casos triviais, um subconjunto fechado de $\mathfrak{F}_s(X; M)$.

Observação — Se $f, g : X \to M$ são contínuas e $\sup_{x \in S} d(f(x), g(x)) < \epsilon$ então $\sup_{x \in \overline{S}} d(f(x), g(x)) < \epsilon$. Em outras palavras, no espaço $\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}(X; M)$ tem-se $V(f; S, \epsilon) = V(f; \overline{S}, \epsilon)$. Segue-se daí que, indicando com $\overline{\mathfrak{S}}$ a coleção dos fechos $\overline{S}$ dos conjuntos $S \in \mathfrak{S}$, temos $\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}(X; M) = \mathfrak{C}_{\overline{\mathfrak{S}}}(X; M)$. Isto corresponde ao fato de que se as aplicações $f_n : X \to M$ e $f : X \to M$ são contínuas e $f_n \to f$ uniformemente em S então $f_n \to f$ uniformemente em $\overline{S}$.

Proposição 15 — *Quando $\mathfrak{S}$ é uma cobertura enumerável de X, o espaço $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$ é metrizável.*

Demonstração: Em virtude da Prop. 6, o espaço $Y = \prod_{S \in \mathfrak{S}} \mathfrak{F}_u(S; M)$ é metrizável. Como $\mathfrak{S}$ cobre X, a aplicação $\varphi : \mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M) \to Y$ é biunívoca e portanto um homeomorfismo sôbre um subespaço de Y. Logo, $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$ é metrizável.

Corolário — *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto enumerável no infinito. Então, $\mathfrak{F}_c(X; M)$ é metrizável.*

Com efeito, pela Prop. 23, Cap. VII, temos $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, onde cada K_n é compacto e $K_n \subset \text{int.}\, K_{n+1}$. Seja $\mathfrak{S} = \{K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots\}$. Todo subconjunto de X está contido em algum K_n. Logo, o saturamento de $\mathfrak{S}$ é a coleção das partes relativamente compactas de X. Segue-se que $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M) = \mathfrak{F}_c(X; M)$. Pela proposição acima, $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$ é metrizável, o que demonstra o corolário.

Quando existe uma cobertura enumerável $\mathfrak{S}_0 = \{S_1, S_2, \ldots, S_n \ldots\}$ tal que $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M) = \mathfrak{F}_{\mathfrak{S}_0}(X; M)$ então a topologia de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$ pode ser definida (vide § 3) pela métrica

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sup_{x \in S_n} \frac{d(f(x), g(x))}{1 + d(f(x), g(x))} . \qquad (*)$$

Assim, por exemplo, considerando a coleção dos intervalos $[-n, n]$ da reta, (onde $n \in N$) vemos que a topologia de $\mathfrak{F}_c(R, R)$ pode ser definida pela métrica

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sup_{-n \leq t \leq n} \frac{|f(t) - g(t)|}{1 + |f(t) - g(t)|} .$$

Se M é um espaço métrico completo então (dentro da hipótese feita sôbre $\mathfrak{S}_0$) a métrica (*) acima torna $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$ um espaço métrico completo.

Com efeito, pela Prop. 7, o produto $Y = \prod_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F}_u(S_n; M)$ é um espaço métrico completo. Além disso, a aplicação $\varphi : \mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M) \to Y$, definida por $\varphi(f) = (f_n)$, com $f_n = f|S_n$, é uma isometria de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$ sôbre um subespaço $F \subset Y$. O subespaço F consiste de tôdas as seqüências $h = (h_n)$ (onde cada h_n é uma aplicação de S_n em M) tais que existe uma aplicação $f : X \to M$ com $h_n = f|S_n$. Isto se exprime simplesmente dizendo que F é formado pelas seqüências $h = (h_n)$, $h_n : S_n \to M$, tais que $h_m(x) = h_n(x)$ sempre que $x \in S_m \cap S_n$. Para concluir que $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$ é completo, basta então provar que F é fechado em Y, o que será feito mediante o lema abaixo.

LEMA — *O conjunto F, imagem da aplicação $\varphi : \mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M) \to Y$, onde $Y = \prod_{S \in \mathfrak{S}} \mathfrak{F}_u(S; M)$ e $\varphi(f) = (f|S)_{S \in \mathfrak{S}}$, é fechado em Y.*

Demonstração: F consiste das famílias $h = (h_S) \in Y$ tais que $h_S(x) = h_T(x)$ sempre que $x \in S \cap T$. Seja $k \in \overline{F}$ em Y. Dados arbitràriamente $S, T \in \mathfrak{S}$ e $x_0 \in S \cap T$, mostremos que $k_S(x_0) = k_T(x_0)$. Daí seguir-se-á que $k \in F$, donde F é fechado. Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. O conjunto $V = \{h \in Y; d(h_S, k_S) < \epsilon, d(h_T, k_T) < \epsilon\}$ é uma vizinhança de k em Y. Logo existe $h \in V \cap F$. Isto significa que $h_S(x_0) = h_T(x_0)$, $d(h_S(x_0), k_S(x_0)) < \epsilon$ e $d(h_T(x_0), k_T(x_0)) < \epsilon$. Logo, $d(k_S(x_0), k_T(x_0)) < 2\epsilon$. Como ϵ é arbitrário, concluímos que $k_S(x_0) = k_T(x_0)$, o que prova o lema.

Em virtude dos corolários das Props. 13 e 14, concluímos então que: *Se X fôr um espaço de Hausdorff localmente compacto enumerável no infinito e M fôr um espaço métrico completo, a métrica (*) acima definida torna $\mathfrak{C}_c(X; M)$ um espaço métrico completo.*

Se, além disso, X fôr metrizável e M tiver base enumerável, $\mathfrak{C}(X; M)$ terá base enumerável.

Esta última conclusão segue-se da Prop. 5 dêste Cap. e da Prop. 5 do Cap. VIII. Finalizando estas observações notamos que, muito embora o espaço topológico $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$ nem sempre seja metrizável, sua topologia pode ser descrita através de seqüências, do seguinte modo:

Suponhamos que $S_1, \ldots, S_n \in \mathfrak{S}$ implique $S_1 \cup \ldots \cup S_n \in \mathfrak{S}$. Dado um subconjunto $P \subset \mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$ tem-se $f \in \overline{P}$ se, e sòmente se, para cada $S \in \mathfrak{S}$, existe uma seqüência de aplicações $f_n \in P$ convergindo para f uniformemente em S. [A seqüência (f_n) depende do conjunto S.]

Para verificar a veracidade da afirmação acima, suponhamos $f \in \overline{P}$. Então, fixado arbitràriamente $S \in \mathfrak{S}$, para cada $n \in N$ existe $f_n \in P \cap V(f; S, 1/n)$. Segue-se que $f_n \to f$ uniformemente em S. Recìprocamente, se tal condição se cumpre, mostraremos que $f \in \overline{P}$. Pela hipótese feita sôbre $\mathfrak{S}$, os conjuntos $V(f; S, \epsilon)$ constituem um sistema fundamental de vizinhanças de f em $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$. Para cada $\epsilon > 0$ e cada $S \in \mathfrak{S}$ existe n_0 tal que $n > n_0$ implica $d(f_n|S, f|S) < \epsilon$, com $f_n \in P$. Logo, $f_n \in V(f; S, \epsilon)$ e portanto $f \in \overline{P}$.

§ 6. Eqüicontinuidade

Sejam X um espaço topológico e M um espaço métrico. Um conjunto E de aplicações $f : X \to M$ diz-se *eqüicontínuo* no ponto $x_0 \in X$ quando, para todo $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança V de x_0 em X tal que, para todo $x \in V$, $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$, *qualquer que seja* $f \in E$.

Se E é eqüicontínuo no ponto x_0, então tôdas as aplicações $f \in E$ são contínuas no ponto x_0 e todo subconjunto de E é eqüicontínuo no ponto x_0.

Diz-se que um conjunto E de aplicações $f : X \to M$ é *eqüicontínuo* quando E é eqüicontínuo em todos os pontos de X.

Se X também fôr um espaço métrico, um conjunto E de aplicações $f : X \to M$ dir-se-á *uniformemente eqüicontínuo* se, para cada $\epsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$, $x, y \in X$, implique $d(f(x), f(y)) < \epsilon$, qualquer que seja $f \in E$.

EXEMPLOS

14. Todo conjunto finito $E = \{f_1, \ldots, f_n\}$ de aplicações contínuas $f_i : X \to M$ é eqüicontínuo. Com efeito, dado $x_0 \in X$, para cada $\epsilon > 0$ e cada $i = 1, \ldots, n$, existe uma vizinhança V_i do ponto x_0 em X tal que $x \in V_i$ implica $d(f_i(x), f_i(x_0)) < \epsilon$. Seja $V = V_1 \cap \ldots \cap V_n$. Então, $x \in V$ implica $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$, seja qual fôr $f = f_i \in E$.

15. Sejam X, M espaços métricos e E um conjunto de aplicações de X em M tal que existe uma constante (de Lipschitz) $c > 0$ com a seguinte propriedade: $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$, quaisquer que sejam $x, y \in X$ e $f \in E$. Então, E é uniformemente eqüicontínuo. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = \epsilon/c$. Se $d(x, y) < \delta$, tem-se $d(f(x), f(y)) < \epsilon$, para tôda $f \in E$. Em particular, temos:

15a. Sejam X, M espaços métricos. Todo conjunto E de *contrações fracas* (isto é, aplicações tais que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$) de X em M é uniformemente eqüicontínuo. Por exemplo, dado um espaço métrico M, seja $E = \{f_x; x \in M\}$ o conjunto das funções reais $f_x : M \to R$, definidas por $f_x(y) = d(x, y)$, $y \in M$. E é a imagem de M pela imersão isométrica

$\varphi : M \to \mathfrak{C}_u(M; R)$, (vide Ex. 14, Cap. I) onde $\varphi(x) = f_x$. Os elementos do conjunto de funções E são contrações fracas, pois $|f_x(y) - f_x(z)| = |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z)$ (Corol. da Prop. 1, Cap. I). Portanto, E é (uniformemente) eqüicontínuo.

Mais geralmente, seja $\mathfrak{F}(M)$ a coleção dos subconjuntos limitados, fechados e não-vazios do espaço métrico M. Definiremos uma imersão natural $\varphi : \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{C}_u(M; R)$ pondo, para cada $F \in \mathfrak{F}(M)$, $\varphi(F) = f_F$, onde $f_F : M \to R$ é a função tal que $f_F(x) = d(x, F)$, $x \in M$. O fato de que φ é biunívoca resulta imediatamente de serem fechados os conjuntos $F \in \mathfrak{F}(M)$. Indiquemos com $E = \{f_F; F \in \mathfrak{F}(M)\}$ a imagem de φ. O conjunto E é uniformemente eqüicontínuo. Com efeito, as funções $f_F \in E$ são tôdas contrações fracas porque, em virtude da Prop. 1, Cap. I, temos $|f_F(x) - f_F(y)| = |d(x, F) - d(y, F)| \leq d(x, y)$, sejam quais forem $x, y \in M$. Costuma-se identificar $\mathfrak{F}(M)$ com E e considerar $\mathfrak{F}(M)$ como um subconjunto (uniformemente) eqüicontínuo de $\mathfrak{C}_u(M; R)$.

15b. Todo conjunto E de imersões isométricas $f : X \to M$ [isto é, aplicações f tais que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$] é uniformemente eqüicontínuo. Em particular, todo conjunto E de isometrias $f : M \to M$ (imersões isométricas de M sôbre M) é uniformemente eqüicontínuo.

16. Generalizando o exemplo anterior, seja E um conjunto de aplicações de X em M (espaços métricos) com a seguinte propriedade: para cada $x \in S$ existem uma vizinhança V_x e um número real $c_x > 0$ tais que $d(f(y), f(z)) \leq c_x \cdot d(y, z)$ para quaisquer $y, z \in V_x$ e $f \in E$. (Diz-se neste caso que as aplicações $f \in E$ são localmente Lipschitzianas de maneira uniforme.) Então, E é eqüicontínuo. Em particular, seja E um conjunto de aplicações diferenciáveis $f : U \to R^n$, definidas num aberto $U \subset R^m$. Suponhamos que, para todo $x \in U$, exista uma bola B_x de centro x, contida em U, e um número real $c_x > 0$ tais que $|f'(y)| < c_x$ para todo $y \in B_x$ e tôda $f \in E$. Então, pelo teorema do valor médio, temos $|f(y) - f(z)| \leq c_x|y - z|$ quaisquer que sejam $f \in E$, $y, z \in B_x$. Segue-se que o conjunto E é eqüicontínuo.

17. Seja $E = \{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ onde $f_n: R \to R$ é definida do seguinte modo: se $x = 2p \cdot n$ é um múltiplo *par* de n, $f_n(x) = 0$, se $x = (2p + 1)n$ é um múltiplo *ímpar* de n, $f_n(x) = 1$. Entre $2p \cdot n$ e $(2p + 1)n$, f_n é linear. Se excetuarmos os pontos da reta com coordenadas inteiras, as funções $f \in E$ serão deriváveis, com $|f'(x)| \leq 1$. Como o teorema do valor

Gráfico de f_3

médio é ainda válido para funções que deixam de possuir derivada num conjunto enumerável de pontos (vide [Dieudonné], pág. 153), temos $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ sejam quais forem $f \in E$, $x, y \in R$. Logo, E é uniformemente eqüicontínuo. (Isto pode ser fàcilmente verificado sem apêlo ao teorema do valor médio.)

18. Seja $[a, b]$ um intervalo compacto da reta. Indiquemos com $C = \mathfrak{C}_u([a, b]; R)$ o espaço vetorial das funções reais contínuas definidas em $[a, b]$ com a topologia da convergência uniforme, a qual, como se sabe, é definida pela norma $|f| = \sup. \{|f(x)|; x \in [a, b]\}$. Seja $k : [a, b] \times \times [a, b] \to R$ uma função real contínua de duas variáveis. Com auxílio de k, definimos uma aplicação linear $K : C \to C$, pondo, para cada $f \in C$ e $x \in [a, b]$

$$K(f) \cdot x = \int_a^b k(x, y) f(y) \, dy.$$

Vê-se que $|K(f)| \leq |k| \cdot |f|$, onde $|k| = \sup. \{|k(x, y)|; x, y \in [a, b]\}$. Logo, K é contínua. Dada uma constante $r > 0$, seja $D = \{f \in C; |f| \leq r\}$ o disco de centro 0 e raio r em C. O conjunto D não é eqüicontínuo mas $K(D)$, sua imagem por K, é eqüicontínuo. Com efeito dada $f_0 \in C$ e tomado $\epsilon > 0$, seja $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta$ implique $|k(x, y) - k(x_0, y)| < < \epsilon \cdot r/(b - a)$, para todo $y \in [a, b]$. (A existência de δ provém do fato de que k é uniformemente contínua em $[a, b] \times [a, b]$.) Então, seja qual fôr $f \in D$, teremos

$$|K(f) \cdot x - K(f) \cdot x_0| = \left| \int_a^b (k(x, y) - k(x_0, y)) f(y) \, dy \right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |k(x, y) - k(x_0, y)| \cdot |f(y)| dy \leq \epsilon,$$

desde que $|x - x_0| < \delta$. Conclui-se daí que K transforma todo subconjunto limitado $S \subset C$ num conjunto (uniformemente) eqüicontínuo $K(S)$.

19. Seja U um subconjunto aberto do plano R^2. Identificando R^2 com o corpo dos números complexos, seja E um conjunto de funções holomorfas $f : U \to R^2$ (isto é, funções complexas que possuam derivadas, no sentido dos números complexos, em todos os pontos de U). Suponhamos que, para cada subconjunto compacto $K \subset U$, exista um número real $c = c(K) > 0$ tal que $|f(z)| \leq c$ sejam quais forem $f \in E$ e $z \in K$. (Diz-se que as funções $f \in E$ são uniformemente limitadas em cada subconjunto compacto de U.) Então, E é eqüicontínuo. Com efeito, dado $z_0 \in U$,

seja $K = \{w \in R^2;\ |w - z_0| \leq 2r_0\}$ um disco de centro z_0 e raio $2r_0$, contido em U. Seja $c = c(K)$. Chamemos de V o disco de centro z_0 e raio r_0. Afirmamos que $z, w \in V$ implica $|f(z) - f(w)| \leq (2c/r_0)\,|z - w|$, qualquer que seja $f \in E$. Pelo teorema do valor médio, basta mostrar que, para todo $z \in V$ e tôda $f \in E$, tem-se $|f'(z)| \leq 2c/r_0$. Ora, em virtude da fórmula integral de Cauchy, chamando de $C = \{w \in R^2;\ |w - z_0| = 2r_0\}$ o bordo de K, temos, para todo $z \in V$:

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(z - w)^2}\, dw \right| \leq \frac{c}{2\pi r_0^2}\, 4\pi r_0 = 2c/r_0,$$

pois, para todo $w \in C$, $|z - w| \geq r_0$ e $|f(w)| \leq c$.

Sejam X um espaço topológico e M um espaço métrico. Dado um conjunto $E \subset \mathfrak{F}(X; M)$ de aplicações de X em M, a cada ponto $x \in X$, podemos associar uma aplicação $\tilde{x} : E \to M$, definida por $\tilde{x}(f) = f(x)$. Isto equivale a encarar, no símbolo $f(x)$, $f \in E$, $x \in X$, x como uma função e f como a variável independente. Ou ainda, considerando $\mathfrak{F}(X; M) = M^X$ como o produto cartesiano de várias cópias de M, com índices em X, temos $E \subset M^X$, e, para cada $x \in X$, $\tilde{x} = p_x | E$ = restrição ao conjunto E da projeção $p_x : M^X \to M$. Vê-se então que $\tilde{x} \in \mathfrak{C}(E; M)$ desde que tomemos em E uma topologia pelo menos tão fina quanto a topologia da convergência simples.

Convencionemos portanto que está definida em E uma topologia, da qual exigiremos apenas que seja pelo menos tão fina quanto a topologia do subespaço $E \subset \mathfrak{F}_S(X; M)$. Teremos então uma aplicação

$$P : X \to \mathfrak{C}(E; M),$$

definida por $P(x) = \tilde{x}$, sendo $\tilde{x}(f) = f(x)$, $f \in E$, $x \in X$.

Proposição 15 — *O conjunto* $E \subset \mathfrak{F}(X; M)$ *é eqüicontínuo no ponto* $x_0 \in X$ *se, e sòmente se, a aplicação* $P : X \to \mathfrak{C}_u(E; M)$ *é contínua no ponto* x. *Se* X *fôr um espaço métrico,* E *será uniformemente eqüicontínuo se, e sòmente se,* P *fôr uniformemente contínua.*

Demonstração: A condição "$d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$ para todo $x \in V$ e todo $f \in E$" equivale a "$d(\tilde{x}(f), \tilde{x}_0(f)) < \epsilon$ para todo $x \in V$ e todo $f \in E$", ou seja, a "$d(\tilde{x}, \tilde{x}_0) < \epsilon$ para todo $x \in V$", o que exprime a continuidade de P no ponto x_0. A segunda parte da proposição se demonstra anàlogamente.

Corolário — *Seja* X *um espaço métrico compacto. Todo conjunto eqüicontínuo* $E \subset \mathfrak{F}(X; M)$ *é uniformemente eqüicontínuo.*

Com efeito, tôda aplicação contínua $P : X \to \mathfrak{C}_u(E; M)$ é uniformemente contínua.

§ 7. O Teorema de Ascoli

Proposição 16 — *Sejam X um espaço topológico e M um espaço métrico. Sôbre um conjunto eqüicontínuo $E \subset \mathfrak{C}(X; M)$ a topologia da convergência simples coincide com a topologia da convergência uniforme nas partes compactas.*

Demonstração: Indiquemos com E_s e E_c os espaços topológicos obtidos quando se considera E como subespaço de $\mathfrak{C}_s(X; M)$ e de $\mathfrak{C}_c(X; M)$, respectivamente. Como a aplicação identidade $E_c \to E_s$ é contínua, basta mostrar a continuidade da aplicação identidade $E_s \to E_c$. Tomemos arbitràriamente $f \in E_c$ e uma vizinhança básica $V = V(f; K, \epsilon) = \{g \in E; \sup_{x \in K} d(g(x), f(x)) < \epsilon\}$, sendo $K \subset X$ compacto e $\epsilon > 0$. Cada $x \in K$ possui uma vizinhança W_x tal que $y \in W_x$ implica $d(g(y), g(x)) < \epsilon/3$, qualquer que seja $g \in E$. A cobertura $K \subset \bigcup_x W_x$ admite uma subcobertura finita $K \subset W_1 \cup \ldots \cup W_n$, onde $W_i = W_{x_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Seja, $U = \{g \in E; d(g(x_i), f(x_i))| < \epsilon/3,\ i = 1, \ldots, n\}$. Então, U é uma vizinhança de f em E_s. Resta mostrar que $U \subset V$. Ora, dado $x \in K$ qualquer, tem-se $x \in W_i = W_{x_i}$ para algum $i = 1, \ldots, n$. Logo, $d(g(x), g(x_i)) < \epsilon/3$ e $d(f(x), f(x_i)) < \epsilon/3$, pois $f, g \in E$. Além disso, como $g \in U$ temos $d(g(x_i), f(x_i)) < \epsilon/3$. Segue-se que $d(g(x), f(x)) \leq d(g(x), g(x_i)) + d(g(x_i), f(x_i)) + d(f(x_i), f(x)) < \epsilon$. Como f, g são contínuas e K é compacto, $\sup_{x \in K} d(g(x), f(x)) < \epsilon$ e daí $g \in V$, concluindo a demonstração.

Proposição 17 — *Sejam X um espaço topológico e M um espaço métrico. O fecho de um conjunto eqüicontínuo $E \subset \mathfrak{F}_S(X; M)$ é ainda um conjunto eqüicontínuo.*

Demonstração: Para provar que o fecho $\overline{E}$ é eqüicontínuo, tomemos arbitràriamente um ponto $x_0 \in X$ e um número real $\epsilon > 0$. Existe uma vizinhança V do ponto x_0 em X tal que $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon/3$ para todo $x \in V$ e tôda $f \in E$. Afirmamos que $x \in V$ implica $d(g(x), g(x_0)) < \epsilon$ para tôda $g \in \overline{E}$. Com efeito, dados $x \in V$ e $g \in \overline{E}$, o conjunto

$$U = \{f \in \mathfrak{F}_s(X; M); d(f(x), g(x)) < \epsilon/3,\ d(f(x_0), g(x_0)) < \epsilon/3\}$$

é uma vizinhança de g em $\mathfrak{F}_s(X; M)$. Como $g \in \overline{E}$, existe $f \in E \cap U$. Segue-se que $d(g(x), g(x_0)) \leq d(f(x), g(x)) + d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), g(x_0)) < \epsilon$. Logo, $\overline{E}$ é eqüicontínuo.

Corolário 1 — *Seja* $E \subset \mathfrak{F}(X; M)$ *eqüicontínuo. Então o fecho de* E *em* $\mathfrak{F}_s(X; M)$ *coincide com o fecho de* E *em* $\mathfrak{F}_c(X; M)$.

Indiquemos com $\overline{E}_s$ e $\overline{E}_c$ os fechos de E nesses dois espaços. Como a aplicação identidade $\mathfrak{F}_c(X; M) \to \mathfrak{F}_s(X; M)$ é contínua, temos $E \subset \overline{E}_c \subset \overline{E}_s$. Pela Prop. 17, $\overline{E}_s$ é eqüicontínuo. Logo, as topologias s e c coincidem sôbre $\overline{E}_s$. Como $\overline{E}_c$ é fechado em $\mathfrak{F}_c(X; M)$, segue-se que $\overline{E}_c$ é fechado em $\mathfrak{F}_s(X; M)$. Mas $\overline{E}_s$ é o menor conjunto fechado em $\mathfrak{F}_s(X; M)$ que contém E. Logo, $\overline{E}_s = \overline{E}_c$.

Corolário 2 — *Se* $f_n(x) \to f(x)$ *para todo* $x \in X$ *e* $E = \{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ *é eqüicontínuo, então* f *é contínua e* $f_n \to f$ *uniformemente em cada parte compacta de* M.

Com efeito, temos $f \in \overline{E}_s$ e $f_n \to f$ em $\overline{E}_s$. Mas $\overline{E}_s = \overline{E}_c$, donde $f_n \to f$ em $\overline{E}_c$, isto é, f_n converge uniformemente para f em cada parte compacta de X.

Corolário 3 (*Dini*) — *Seja* $f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n \leq \ldots$ *uma seqüência crescente de funções reais contínuas* $f_n : X \to R$. *Se* (f_n) *converge simplesmente para uma função contínua* $f : X \to R$, *então* $f_n \to f$ *uniformemente em cada parte compacta de* X.

Demonstração: Basta mostrar que $E = \{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ é um conjunto eqüicontínuo. Sejam então $x_0 \in X$ e $\epsilon > 0$. Existe um inteiro $N > 0$ tal que $|f_N(x_0) - f(x_0)| < \epsilon/5$. Pela continuidade de f_N e de f, existe uma vizinhança V de x_0 tal que $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \epsilon/5$ e $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon/5$ para todo $x \in V$. Para todo $x \in X$ e todo inteiro $n \geq N$, temos $|f_n(x) - f(x)| \leq |f_N(x) - f(x)|$ pois a seqüência dada é crescente. Ora, $x \in V$ implica

$$|f_N(x) - f(x)| \leq |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x)| < 3\epsilon/5.$$

Segue-se então que, para todo $x \in V$ e todo $n > N$,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(x_0)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f_n(x_0)| \leq \\ &\leq |f_N(x) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f_N(x_0)| < \\ &< 3\epsilon/5 + \epsilon/5 + \epsilon/5 < \epsilon. \end{aligned}$$

Por conseguinte, o conjunto $\{f_N, f_{N+1}, \ldots\}$ é eqüicontínuo. Daí se conclui fàcilmente que E é eqüicontínuo.

Dados $E \subset \mathfrak{F}(X; M)$ e $x \in X$, indicaremos com $E(x)$ o conjunto dos valôres $f(x)$, quando f percorre E.

PROPOSIÇÃO 18 (*Ascoli*) — *Seja E um conjunto de aplicações contínuas de um espaço topológico X num espaço métrico M. A fim de que E seja relativamente compacto em $\mathfrak{C}_c(X; M)$, é suficiente que:*

1) *$E(x) \subset M$ seja relativamente compacto, para todo $x \in X$;*
2) *E seja eqüicontínuo.*

Quando X é localmente compacto de Hausdorff, estas condições são também necessárias.

Demonstração: Suponhamos que E satisfaz às condições acima. Para cada $x \in M$, $\overline{E(x)} \subset M$ é um subconjunto compacto. Pelo Teorema de Tychonov (Prop. 11) o produto cartesiano $\prod_{x \in X} \overline{E(x)}$ é um subconjunto compacto do espaço de Hausdorff $\mathfrak{F}_s(X; M)$ e portanto é fechado neste espaço. Como $E \subset \prod \overline{E(x)}$, temos $\overline{E}_s \subset \prod \overline{E(x)}$, e daí $\overline{E}_s$ (= fecho de E em $\mathfrak{F}_s$) é compacto. Mas $\overline{E}_s = \overline{E}_c$ (= fecho de E em $\mathfrak{F}_c$) pelo Corol. 1 da Prop. 17. Logo, $\overline{E}_c$ é compacto. Pela Prop. 17, $\overline{E}_c \subset \mathfrak{C}_c(X; M)$ logo, $\overline{E}_c$ é o fecho de E em $\mathfrak{C}_c(X; M)$, o que demonstra a suficiência das condições.

Seja agora X localmente compacto de Hausdorff e suponhamos que E seja relativamente compacto, isto é, que seu fecho $\overline{E}$ em $\mathfrak{C}_c(X; M)$ seja compacto. Como $\mathfrak{C}_c(X; M)$ é fechado em $\mathfrak{F}_c(X; M)$ (Corol. da Prop. 13), $\overline{E}$ é também o fecho de E em $\mathfrak{F}_c(X; M)$. Para cada $x \in X$, a aplicação $\tilde{x} : \mathfrak{C}_c(X; M) \to M$, definida por $\tilde{x}(f) = f(x)$, é contínua. Logo, $\overline{E}(x) = \tilde{x}(\overline{E})$ é compacto em M. Como $E(x) \subset \overline{E}(x)$, temos $\overline{E(x)} \subset \overline{E}(x)$, donde, $\overline{E(x)} \subset M$ é compacto, o que mostra que E cumpre a primeira condição acima. Para provar a eqüicontinuidade de $\overline{E}$, sejam $x_0 \in X$ e $\epsilon > 0$. Como cada $f \in \overline{E}$ é contínua no ponto x_0, dada $f \in \overline{E}$ existe uma vizinhança compacta K_f de x_0 em X tal que $x \in K_f$ implica $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon/3$. Para cada $f \in \overline{E}$, ponhamos também $V_f = V(f; K_f, \epsilon/3) = \{g \in \mathfrak{F}_c;\ \sup_{x \in K_f} d(g(x), f(x)) < \epsilon/3\}$. Da cobertura aberta $\overline{E} \subset \bigcup V_f$ podemos extrair uma subcobertura finita $\overline{E} \subset V_1 \cup \ldots \cup V_n$, onde $V_i = V_{f_i}$. Escrevamos também $K_i = K_{f_i}$, $i = 1, \ldots, n$. A interseção $U = K_1 \cap \ldots \cap K_n$ é uma vizinhança de x_0. Dados $x \in U$ e $g \in \overline{E}$ quaisquer, temos $g \in V_i$ para algum i. Como $x, x_0 \in K_i$, vem $d(g(x), g(x_0)) \leq d(g(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(x_0)) + d(f_i(x_0), g(x_0)) < \epsilon$. Portanto, $\overline{E}$ é eqüicontínuo e conseqüentemente E também.

EXEMPLOS

20. Referindo-nos ao Ex. 15*a*, seja M um espaço métrico limitado. M é isométrico ao subespaço $E \subset \mathfrak{C}_u(M; R)$, formado pelas funções $f_x : y \to d(x, y)$, $x \in M$. Como sabemos, E é equicontínuo. Além disso, para

cada $x \in M$, $E(x) = \{d(x, y) ; y \in M\} \subset [0, \delta]$ onde δ é o diâmetro de M. Assim, $E(x) \subset R$ é relativamente compacto, para cada $x \in M$. Mas nem sempre $E \subset \mathfrak{C}_u(M; R)$ é relativamente compacto: para isso, seria necessário que E (e portanto M) fôsse totalmente limitado e, em particular, M deveria ter base enumerável. Vê-se portanto que o Teorema de Ascoli não se aplica em $\mathfrak{C}_u(M; R)$, salvo, naturalmente, quando M é compacto pois nesse caso $\mathfrak{C}_u(M; R) = \mathfrak{C}_c(M; R)$.

21. Consideremos, como na segunda parte do Ex. 15*a*, o conjunto $\mathfrak{F}(M)$ das partes limitadas e fechadas do espaço métrico M. $\mathfrak{F}(M)$ identifica-se ao subespaço $E \subset \mathfrak{C}_u(M; R)$ formado pelas funções $f_F : x \to d(x, F)$, onde $F \in \mathfrak{F}(M)$. Demonstraremos um resultado clássico de Hausdorff, segundo o qual M compacto implica $\mathfrak{F}(M)$ compacto. Sabemos que E é eqüicontínuo. Além disso, para cada $x \in M$, $E(x) = \{d(x, F); F \in \mathfrak{F}(M)\} \subset [0, \delta]$, onde δ é o diâmetro de M, donde $E(x)$ é relativamente compacto. Pelo Teorema de Ascoli, (aplicável porque $\mathfrak{C}_u(M; R) = \mathfrak{C}_c(M; R)$) E é um subconjunto relativamente compacto de $\mathfrak{C}_u(M; R)$. Resta provar que $E \subset \mathfrak{C}_u(M; R)$ é fechado. Sejam então $f \in \mathfrak{C}(M; R)$ e (F_n) uma seqüência de fechados em M tais que $d(x, F_n) \to f(x)$ uniformemente em M. Devemos provar que $f \in E$. Seja $F = \{y \in M; f(y) = 0\}$. Mostremos que, para todo $x \in M$, $f(x) = d(x, F)$. É fácil ver que $y \in F$ se, e sòmente se, $y = \lim y_m$, onde cada $y_m \in F_m$ e (F_m) é uma subseqüência de (F_n). Dado $x \in M$ existe, pela compacidade de F, um ponto $y_0 \in F$ tal que $d(x, F) = d(x, y_0)$. Temos $y_0 = \lim y_m$, $y_m \in F_m$. Evidentemente, $d(x, F_m) \leq d(x, y_m)$. Fazendo $m \to \infty$ nesta desigualdade, obtemos $f(x) = \lim d(x, F_m) \leq \lim d(x, y_m) = d(x, y_0)$, isto é, $f(x) \leq d(x, F)$. Por outro lado, para cada n, existe $y_n \in F_n$ tal que $d(x, F_n) = d(x, y_n)$. A seqüência (y_n) admite uma subseqüência convergente $y_m \to y \in F$. Logo, $f(x) = \lim d(x, F_m) = \lim d(x, y_m) = d(x, y) \geq d(x, F)$. Por conseguinte, $f(x) = d(x, F)$. $E = \mathfrak{F}(M)$ é fechado em $\mathfrak{C}_u(M; R)$ e portanto compacto.

22. Seja M um espaço métrico compacto. Indiquemos com E o conjunto das isometrias de M, munido da topologia da convergência uniforme. Sabemos que E é eqüicontínuo e, para cada $x \in M$, $E(x)$ é relativamente compacto pois é um subespaço do espaço compacto M. Logo, E é relativamente compacto em $\mathfrak{C}_u(M; M)$. Mais precisamente, E é fechado em $\mathfrak{C}_u(M; M)$. Com efeito seja (f_n) uma seqüência de isometrias de M, convergindo uniformemente para uma aplicação contínua $f : M \to M$. Dados $x, y \in M$ quaisquer, temos $d(f(x), f(y)) = \lim_n d(f_n(x), f_n(y)) = \lim d(x, y) = d(x, y)$. Logo, $f : M \to M$ é uma imersão isométrica. Além disso, f é

sôbre M(*) pois, dado qualquer $y \in M$ existe, para cada n, um ponto $x_n \in M$ tal que $f_n(x_n) = y$. A seqüência (x_n) admite uma subseqüência convergente $x_m \to x \in M$. Temos ainda $f_m(x_m) = y$, com $x_m \to x$ e $f_m \to f$ uniformemente. Daí resulta que $f(x) = y$. Com efeito, sendo f contínua, para cada $\epsilon > 0$ existe m_0 tal que $m > m_0$ implica $d(f(x), f(x_m)) < \epsilon/2$. É possível tomar m_0 tão grande que $m > m_0$ implique também $d(f_m(x), f(x)) < \epsilon/2$ para todo $x \in M$. Segue-se que $m > m_0$ implica

$$d(f(x), f_m(x_m)) \leq d(f(x), f(x_m)) + d(f(x_m), f_m(x_m)) < \epsilon.$$

Logo, $y = \lim f_m(x_m) = f(x)$ e portanto f é uma isometria de M. Assim, E é fechado em $\mathfrak{C}_u(M, M)$. Concluímos portanto que *o conjunto das isometrias de um espaço métrico compacto é um conjunto compacto na topologia da convergência uniforme.*

23. Seja E um conjunto de aplicações diferenciáveis $f : U \to R^n$, definidas num aberto $U \subset R^m$. Suponhamos que, para cada compacto $K \subset U$, exista um número real $c = c(K) > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ e $|f'(x)| \leq c$, qualquer que seja $x \in K$. Então, tôda seqüência (f_n) com $f_n \in E$ possui uma subseqüência (f_m) que converge para uma aplicação contínua $f : U \to R^n$, a convergência sendo uniforme em cada parte compacta $K \subset U$. Com efeito, E é eqüicontínuo (vide Ex. 16) e, para cada $x \in U$, $E(x) \subset R^n$ é limitado, donde relativamente compacto. Pelo teorema de Ascoli, $E \subset \mathfrak{C}_c(U; R^n)$ é relativamente compacto. Sendo U localmente compacto com base enumerável, $\mathfrak{C}_c(U; R^n)$ é metrizável. Logo, tôda seqüência de pontos de E possui uma subseqüência convergente, o que demonstra a afirmação feita. Note-se que $f = \lim f_m$ é contínua mas não necessàriamente diferenciável. Entretanto, se supusermos que as aplicações $f \in E$ possuem derivada segundas e que, para cada compacto $K \subset U$, valem $|f(x)| \leq c$, $|f'(x)| \leq c$, $|f''(x)| \leq c$, então tôda seqüência (f_n), com $f_n \in E$, possui uma subseqüência (f_m) convergindo em U para uma aplicação diferenciável $f : U \to R^n$, e, em cada compacto $K \subset U$, $f_m \to f$ e $f_m' \to f'$ uniformemente. Isto resulta imediatamente do caso anterior.

24. Para funções holomorfas $f : U \to R^2$ (vide Ex. 19), a situação é bem mais agradável. Dado um conjunto E de funções holomorfas em U, se supomos que, para cada compacto $K \subset U$, existe um número real $c = c(K) > 0$ tal que $|f(z)| \leq c$ para todo $z \in K$, então E é eqüicontínuo e (evidentemente) $E(z)$ é relativamente compacto, seja qual fôr $z \in U$.

(*) De um modo geral, tôda imersão isométrica de um espaço métrico compacto M em si mesmo é uma isometria, isto é, é *sôbre* M. (Vide Exercício 13 do Capítulo III.)

Pelo Teorema de Ascoli, $E \subset \mathfrak{C}_c(U; R^2)$ é relativamente compacto. Assim, tôda seqüência (f_n) com $f_n \in E$, possui uma subseqüência (f_m) que converge para uma função $f \in \mathfrak{C}_c(U; R^2)$, a convergência sendo uniforme em cada parte compacta de U. Portanto, vale o resultado do exemplo anterior sem ser preciso postular a limitação das derivadas. Mas isto não é tudo. A função $f = \lim f_m$ é necessàriamente holomorfa e as derivadas de f_m convergem para as derivadas correspondentes de f, uniformemente em cada compacto $K \subset U$. (Estas últimas afirmações seguem-se imediatamente do Teorema de Morera e da fórmula integral de Cauchy.)

25. A aplicação linear $K : C \to C$, definida no Ex. 18, é um exemplo do que se chama uma aplicação completamente contínua: ela transforma todo conjunto limitado $S \subset C$ num conjunto relativamente compacto $K(S) \subset C$. Esta afirmação decorre imediatamente do Teorema de Ascoli.

26. O conjunto E de funções reais $f_n : R \to R$, definido no Ex. 17 é eqüicontínuo e eqüilimitado: $E(x) \subset [0, 1]$ para todo $x \in R$. Segue-se do Teorema de Ascoli que uma subseqüência de (f_n) converge uniformemente em cada parte compacta de R. Na realidade, em cada parte compacta $K \subset R$ temos $f_n \to 0$ uniformemente. Assim, $f_n(x) \to 0$ para todo $x \in R$ mas não é verdade que $f_n \to 0$ uniformemente. Mais precisamente, nenhuma subseqüência de (f_n) converge uniformemente na reta, ilustrando mais uma vez o fato de que o Teorema de Ascoli não se aplica para $\mathfrak{C}_u(X; M)$, salvo se X fôr compacto.

§ 8. A Topologia Compacto-Aberta

A finalidade dêste parágrafo é introduzir, para espaços de funções contínuas $\mathfrak{C}(X; Y)$, onde Y não é necessàriamente metrizável, uma topologia análoga à da convergência uniforme nas partes compactas.

Consideremos inicialmente algumas noções básicas.

Seja X um espaço topológico. Dada uma coleção $\mathfrak{G}$ de partes de X, diz-se que a *topologia de X é gerada por* $\mathfrak{G}$ quando X e as interseções finitas $G_1 \cap \ldots \cap G_n$ dos conjuntos $G_i \in \mathfrak{G}$ constituem uma base de abertos para X. Isto significa que a topologia de X é a menos fina na qual todos os conjuntos $G \in \mathfrak{G}$ são abertos. Os conjuntos $G \in \mathfrak{G}$ são chamados *geradores* da topologia de X.

Note-se que, dados um conjunto X e uma coleção qualquer $\mathfrak{G}$ de partes de X, existe uma (única) topologia em X gerada por $\mathfrak{G}$. Basta observar que X e as interseções finitas $G_1 \cap \ldots \cap G_n$ de conjuntos em $\mathfrak{G}$ constituem a base de uma topologia em X (*cf.* Prop. 10, Cap. III) cujos abertos são o conjunto vazio, o conjunto X e as reuniões arbitrárias dessas interseções.

Por exemplo, a topologia produto em $X = \Pi X_\lambda$ é gerada pelas fatias $p_\lambda^{-1}(U_\lambda)$, $U_\lambda \subset X_\lambda$ aberto.

Dados os espaços X, Y, se a topologia de Y é gerada por uma coleção de abertos $\mathfrak{G}$, então uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua num ponto $x \in X$ se, e sòmente se, para cada gerador $G \in \mathfrak{G}$ contendo $y = f(x)$, existir uma vizinhança V de x em X tal que $f(V) \subset G$.

Com efeito, a parte "sòmente se" é óbvia. Recìprocamente, dada uma vizinhança arbitrária W de y em Y, existem geradores $G_1, \ldots, G_n \in \mathfrak{G}$ tais que $y \in G_1 \cap \ldots \cap G_n \subset W$. Sejam $V_1, \ldots, V_n$ vizinhanças de x em X tais que $f(V_1) \subset G_1, \ldots, f(V_n) \subset G_n$. Então, $V = V_1 \cap \ldots \cap V_n$ é uma vizinhança de x tal que $f(V) \subset W$, logo, f é contínua no ponto x e a parte "se" está demonstrada.

Advertência — Se a coleção de abertos $\mathfrak{G}$ gera a topologia de X e se uma aplicação $f : X \to Y$ é contínua no ponto $x \in X$, então, dada qualquer vizinhança V de $f(x)$ em Y, existem $G_1, \ldots, G_n \in \mathfrak{G}$ tais que $x \in G_1 \cap \ldots \cap G_n$ e $f(G_1 \cap \ldots \cap G_n) \subset V$, mas pode não existir um conjunto $G \in \mathfrak{G}$ tal que $x \in G$ e $f(G) \subset V$.

Sejam X, Y espaços topológicos. Dados $P \subset X$ e $Q \subset Y$, indicaremos com $A(P; Q)$ o conjunto de tôdas as aplicações *contínuas* $f : X \to Y$ tais que $f(P) \subset Q$. Assim:

$$A(P; Q) = \{f \in \mathfrak{C}(X; Y); f(P) \subset Q\}.$$

Proposição 19 — *Sejam X um espaço topológico e M um espaço métrico. A topologia do espaço $\mathfrak{C}_c(X; M)$ é gerada pelos conjuntos $A(K; V)$ onde $K \subset X$ é compacto e $V \subset M$ é aberto.*

Demonstração: Dada $f \in A(K; V)$, como $f(K)$ é um compacto contido no aberto V, existe $\epsilon > 0$ tal que $x \in K$, $y \in M$ e $d(f(x), y) < \epsilon$ implicam $y \in V$. Consideremos

$$W = W(f; K, \epsilon) = \{g \in \mathfrak{C}(X; M); d(f(x), g(x)) < \epsilon \text{ para todo } x \in K\}.$$

W é uma vizinhança de f em $\mathfrak{C}_c(X; M)$ e da definição de ϵ segue-se que, para todo $g \in W$ tem-se $g(K) \subset V$, isto é, $W \subset A(K; V)$. Logo, cada conjunto $A(K; V)$ é aberto em $\mathfrak{C}_c(X; M)$. Mostremos agora que as interseções finitas $\cap A(K_i; V_i)$ formam uma base de abertos em $\mathfrak{C}_c(X; M)$. Com efeito, seja $W = W(f; K, \epsilon)$ uma vizinhança básica arbitrária de $f \in \mathfrak{C}_c(X; M)$. Todo ponto $x \in K$ possui uma vizinhança U_x em X tal que $f(U_x) \subset B(f(x); \epsilon/3)$, donde $f(\bar{U}_x) \subset B(f(x); \epsilon/2)$. A cobertura aberta $K \subset \bigcup U_x$ possui uma subcobertura finita $K \subset U_1 \cup \ldots \cup U_n$, onde escrevemos U_i em

vez de U_{x_i}. Os conjuntos $K_i = \overline{U}_i \cap K$ são compactos, tem-se $K = K_1 \cup \ldots \cup K_n$ e, pondo $V_i = B(f(x_i); \epsilon/2)$, temos $f(K_i) \subset V_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, isto é, $f \in \bigcap A(K_i; V_i)$. Além disso, $A(K_1; V_1) \cap \ldots \cap A(K_n; V_n) \subset W$. De fato, se $g \in \bigcap A(K_i; V_i)$ e $x \in K$ então $x \in K_i$ para algum i, donde $d(g(x), f(x_i)) < \epsilon/2$ e $d(f(x), f(x_i)) < \epsilon/2$. Assim, $d(g(x), f(x)) < \epsilon$ e, como $x \in K$ é arbitrário, segue-se que $g \in W = W(f; K, \epsilon)$, como queríamos demonstrar.

A proposição acima mostra que, para aplicações contínuas $f : X \to M$, a topologia da convergência uniforme nas partes compactas pode ser caracterizada sem que a métrica de M seja mencionada diretamente. Isto sugere a generalização seguinte.

Sejam X, Y espaços topológicos. Indiquemos, como de costume, com $\mathfrak{C}(X; Y)$ o conjunto das aplicações contínuas de X em Y. A topologia em $\mathfrak{C}(X; Y)$ gerada pelos conjuntos $A(K; V) = \{f \in \mathfrak{C}(X; Y); f(K) \subset V\}$, onde K percorre os subconjuntos compactos de X e V os abertos de Y, chama-se a *topologia compacto-aberta* e o espaço topológico correspondente será indicado com $\mathfrak{C}_{ca}(X; Y)$.

A Prop. 19 mostra, então, que no caso de M ser um espaço métrico tem-se $\mathfrak{C}_c(X; M) = \mathfrak{C}_{ca}(X; M)$.

PROPOSIÇÃO 20 — *A topologia compacto-aberta é mais fina do que a topologia de convergência simples. Em outras palavras, sejam quais forem os espaços topológicos S, Y, a aplicação identidade $\mathfrak{C}_{ca}(X; Y) \to \mathfrak{C}_s(X; Y)$ é contínua.*

Demonstração: Basta observar que a topologia de $\mathfrak{C}_s(X; Y) = Y^X$ é gerada pelos conjuntos $A(x; V)$ onde $x \in X$ e V é aberto em Y, pois os $A(x; V)$ são as fatias $p_x^{-1}(V)$ no espaço produto Y^X. Como cada ponto $x \in X$ é um conjunto compacto, a proposição segue-se.

COROLÁRIO — *Se Y é um espaço de Hausdorff, então, $\mathfrak{C}_{ca}(X; Y)$ é de Hausdorff, seja qual fôr X.*

Com efeito, $\mathfrak{C}_s(X; Y)$ é de Hausdorff por ser um subespaço do produto cartesiano Y^X, que é de Hausdorff (Prop. 9). A topologia de $\mathfrak{C}_{ca}(X; Y)$, sendo mais fina do que a de $\mathfrak{C}_s(X; Y)$ é, portanto, de Hausdorff.

Sejam $f \in \mathfrak{F}(X; Y)$, $F \subset \mathfrak{F}(X; Y)$, $x \in X$ e $S \subset X$. Por simplicidade, escreveremos às vêzes $f \cdot x$ ou fx em vez de $f(x)$; $f \cdot S$ ou fS em vez de $f(S)$ e $F \cdot x$ ou Fx em vez de $F(x) = \{f(x); f \in F\}$.

Dados os conjuntos X, Y, Z e uma aplicação $f : X \to \mathfrak{F}(Y; Z)$, usaremos a notação $\tilde{f} : X \times Y \to Z$ para indicar a aplicação definida por $\tilde{f}(x, y) =$

$= f(x) \cdot y$. É fácil verificar que, pondo $T(f) = \tilde{f}$ tem-se uma correspondência biunívoca

$$T : \mathfrak{F}(X; \mathfrak{F}(Y; Z)) \to \mathfrak{F}(X \times Y; Z).$$

Quando se usa a notação $\mathfrak{F}(A; B) = B^A$, tem-se uma correspondência biunívoca $T : (Z^Y)^X \to Z^{(X \times Y)}$. A proposição abaixo é fundamental.

Proposição 21 — *Sejam X, Y, Z espaços topológicos, onde Y é de Hausdorff. Uma aplicação $f : X \to \mathfrak{C}_{ca}(Y; Z)$ é contínua se, e sòmente se, para cada compacto $L \subset Y$, a restrição $\bar{f} : X \times L \to Z$, de $\tilde{f}$ a $X \times L$, é contínua.*

Demonstração: Suponhamos que, para cada compacto $L \subset Y$, $\bar{f} : X \times L \to Z$ seja contínua. Para provar que f é contínua num ponto arbitrário $x \in X$, tomemos um compacto $L \subset Y$ e um aberto $W \subset Z$ tais que $f(x) \in A(L; W)$. Isto significa que $f(x) \cdot L \subset W$, isto é, $\tilde{f}(x \times L) \subset \subset W$. Pelo lema anterior à Prop. 7, Cap. VII, existe um aberto U contendo x em X tal que $\bar{f}(U \times L) \subset W$, ou seja $f(U) \cdot L \subset W$, donde $f(U) \subset \subset A(L; W)$. Isto mostra que f é contínua.

Recìprocamente, seja $f : X \to \mathfrak{C}_{ca}(Y; Z)$ contínua e mostremos a continuidade de $\bar{f} : X \times L \to Z$ para todo compacto $L \subset Y$. Tomemos arbitràriamente um ponto $(x, y) \in X \times L$ e um aberto $W \subset Z$ com $\tilde{f}(x, y) = = f(x) \cdot y \in W$. Em virtude da continuidade de $f(x) : L \to Z$ e de ser L um espaço compacto de Hausdorff, existe uma vizinhança compacta K de y em L, tal que $f(x) \cdot K \subset W$, isto é, $f(x) \in A(K; W)$. Como f é contínua, existe uma vizinhança U de x em X tal que $f(U) \in A(K; W)$, isto é, $\bar{f}(U \times K) \subset W$. Logo, $\bar{f} : X \times L \to Z$ é contínua.

Dados os conjuntos X, Y, indicaremos com $v : \mathfrak{F}(X; Y) \times X \to Y$ a aplicação definida por $v(f, x) = f(x)$, que associa a cada par (f, x) o *valor* $f(x)$ de f no ponto x. Por simplicidade, indicaremos com o mesmo símbolo v as restrições de v a subconjuntos de $\mathfrak{F}(X; Y) \times X$.

Corolário — *Se X é um espaço de Hausdorff, então $v : \mathfrak{C}_{ca}(X; Y) \times \times K \to Y$, definida por $v(f, x) = f(x)$, é contínua para cada compacto $K \subset X$.*

Com efeito, $v = \bar{f}$, onde $f : \mathfrak{C}_{ca}(X; Y) \to \mathfrak{C}_{ca}(X; Y)$ é a aplicação identidade.

Proposição 22 — *Sejam X, Z espaços topológicos quaisquer e Y localmente compacto de Hausdorff. Para que $f : X \to \mathfrak{C}_{ca}(Y; Z)$ seja contínua, é necessário e suficiente que $\tilde{f} : X \times Y \to Z$ seja contínua.*

Demonstração: Em virtude da Prop. 21, para que $\tilde{f}$ seja contínua é necessário que f o seja, mesmo quando Y é apenas um espaço de Hausdorff.

Por outro lado, se Y é localmente compacto de Hausdorff então todo ponto de $X \times Y$ pertence ao interior de algum conjunto da forma $X \times L$, onde $L \subset Y$ é compacto. Se f é contínua, as restrições $\bar{f} | (X \times L)$ são contínuas para todo compacto $L \subset Y$, logo, $\bar{f} : X \times Y \to Z$ é contínua.

Corolário — *Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto. A aplicação $v : \mathfrak{C}_{ca}(X; Y) \times X \to Y$, definida por $v(f, x) = f(x)$, é contínua.*

Com efeito, $v = \bar{f}$, onde $f : \mathfrak{C}_{ca}(X; Y) \to \mathfrak{C}_{ca}(X; Y)$ é a aplicação identidade.

Observação — Dados um espaço de Hausdorff localmente compacto X e um espaço topológico qualquer Y, a topologia compacto-aberta é a menos fina em $\mathfrak{C}(X; Y)$ que torna contínua a aplicação $v : \mathfrak{C}(X; Y) \times X \to Y$. Com efeito se t é uma topologia em $\mathfrak{C}(X; Y)$ tal que $v : \mathfrak{C}_t(X; Y) \times X \to Y$ é contínua então, pela Prop. 22, a aplicação identidade $\mathfrak{C}_t(X; Y) \to \mathfrak{C}_{ca}(X; Y)$ é contínua, donde t é mais fina do que a topologia *ca*.

Quando X não é localmente compacto, entre as topologias que tornam $v : \mathfrak{C}(X; Y) \times X \to Y$ contínua pode não existir uma menos fina de tôdas.

Sejam X, Y, Z espaços topológicos. Consideremos a aplicação

$$S = T^{-1} : \mathfrak{F}(X \times Y; Z) \to \mathfrak{F}(X; \mathfrak{F}(Y; Z)),$$

definida por $S(\bar{f}) = f$, onde $f(x) \cdot y = \bar{f}(x, y)$.

Se $\bar{f} : X \times Y \to Z$ fôr contínua então, evidentemente, $S(\bar{f}) = f$ será uma aplicação de X em $\mathfrak{C}(Y; Z)$ e, para cada compacto $L \subset Y$, a restrição $\bar{f} : X \times L \to Z$ será contínua. Portanto, em virtude da Prop. 21, $f : X \to \mathfrak{C}_{ca}(Y; Z)$ será contínua, desde que Y seja um espaço de Hausdorff. Assim, quando Y é de Hausdorff, S aplica $\mathfrak{C}(X \times Y; Z)$ em $\mathfrak{C}(X; \mathfrak{C}_{ca}(Y; Z))$. Uma afirmação mais precisa pode ser feita, a saber:

Proposição 23 — *Sejam X, Y espaços de Hausdorff e Z um espaço topológico qualquer. Então, $S : \mathfrak{C}_{ca}(X \times Y; Z) \to \mathfrak{C}_{ca}(X; \mathfrak{C}_{ca}(Y; Z))$ é um homeomorfismo sôbre um subespaço de $\mathfrak{C}_{ca}(X; \mathfrak{C}_{ca}(Y; Z))$.*

Demonstração: Para provar a continuidade de S basta, pela Prop. 21, verificar que, para todo compacto $K \subset X$, a aplicação $\bar{S} : \mathfrak{C}_{ca}(X \times Y; Z) \times K \to \mathfrak{C}_{ca}(Y; Z)$ é contínua. Repetindo o argumento, basta provar que $\bar{\bar{S}} : \mathfrak{C}_{ca}(X \times Y; Z) \times K \times L \to Z$ é contínua, para $K \subset X$, $L \subset Y$ compactos quaisquer. Ora, $\bar{\bar{S}}(\bar{f}, x, y) = \bar{f}(x, y)$. Logo, S é contínua, pelo corolário da Prop. 21. Seja agora $H \subset \mathfrak{C}_{ca}(X; \mathfrak{C}_{ca}(Y; Z))$ a imagem de S, isto é, o conjunto das aplicações contínuas $f : X \to \mathfrak{C}_{ca}(Y; Z)$ tais que $f = T()f$

é contínua. Mostremos que $T = S^{-1} : H \to \mathfrak{C}_{ca}(X \times Y; Z)$ é contínua. Pela Prop. 21, basta provar que, para todo compacto $P \subset X \times Y$, a aplicação $T : H \times P \to Z$ é contínua. Como $P \subset p_X(P) \times p_Y(P) = K \times L$, é suficiente provar a continuidade de $\tilde{T} : H \times K \times L \to Z$ para $K \subset X$ e $L \subset Y$ compactos. Na realidade, vale algo mais forte: $\tilde{T} : \mathfrak{C}_{ca}(X; \mathfrak{C}_{ca}(Y; Z)) \times K \times L \to Z$ é contínua. Com efeito, sendo $\tilde{T}(f, (x, y)) = T(f)\cdot(x, y) = f(x)\cdot y$, vemos que $\tilde{T}$ é a aplicação composta:

$$[\mathfrak{C}_{ca}(X; \mathfrak{C}_{ca}(Y; Z)) \times K] \times L \xrightarrow{v_1 \times id} \mathfrak{C}_{ca}(Y; Z) \times L \xrightarrow{v_2} Z$$

$$((f, x), y) \longrightarrow (f(x), y) \longrightarrow f(x)\cdot y.$$

Pelo Corolário da Prop. 21, as aplicações $v_1 : \mathfrak{C}_{ca}(X; \mathfrak{C}_{ca}(Y; Z)) \times K \to \mathfrak{C}_{ca}(Y; Z)$ e $v_2 : \mathfrak{C}_{ca}(Y; Z) \times L \to Z$ são contínuas. Logo, $\tilde{T} = v_2 \circ (v_1 \times id)$ é contínua.

COROLÁRIO (*Lei exponencial*) — *Sejam X um espaço de Hausdorff, Y localmente compacto de Hausdorff e Z arbitrário. A aplicação S, definida por $S(\tilde{f}) = f$, onde $f(x)\cdot y = \tilde{f}(x, y)$, é um homeomorfismo de $\mathfrak{C}_{ca}(X \times Y; Z)$ sôbre $\mathfrak{C}_{ca}(X; \mathfrak{C}_{ca}(Y; Z))$.*

Com efeito, basta verificar que S é sôbre, o que decorre da Prop. 22 pois, sendo Y localmente compacto, $f : X \to \mathfrak{C}_{ca}(Y; Z)$ contínua implica $\tilde{f} : X \times Y \to Z$ contínua.

OBSERVAÇÃO — Alguns autores usam a notação B^A para indicar o espaço $\mathfrak{C}_{ca}(A; B)$. Nessa notação, o corolário acima exprime que $(Z^Y)^X$ é naturalmente homeomorfo a $Z^{(X \times Y)}$, o que justifica o nome "lei exponencial".

§ 9. Exercícios

1. Seja $A \subset \Pi X_\lambda$ aberto e, para cada $\lambda \in L$, seja $A_\lambda = p_\lambda(A)$. Tem-se $A_\lambda = X_\lambda$ exceto para um número finito de valôres de λ.

2. Para cada $\lambda \in L$, seja $S_\lambda \subset X_\lambda$. A topologia induzida em ΠS_λ pela aplicação de inclusão $i : \Pi S_\lambda \to \Pi X_\lambda$ é a topologia produto dos subespaços S_λ. O fecho de ΠS_λ em ΠX_λ é igual a $\Pi \overline{S}_\lambda$. ΠS_λ é denso em ΠX_λ se, e sòmente se, cada S_λ é denso em X_λ.

3. Seja $L = \cup L_\alpha$, $\alpha \in A$, os L_α sendo dois a dois disjuntos. Então, $\prod_{\lambda \in L} X_\lambda$ é homeomorfo a $\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$, onde $Y_\alpha = \prod_{\lambda \in L_\alpha} X_\lambda$, para cada $\alpha \in A$. Em outras palavras, vale a associatividade $\prod_{\alpha \in A} (\prod_{\lambda \in L_\alpha} X_\lambda) = \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$.

4. Uma aplicação biunívoca $\varphi : L \to L$, de L sôbre si mesmo, induz um homeomorfismo $\varphi^* : \prod_{\lambda \in L} X_\lambda \to \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$, onde $\varphi^*((x_\lambda)) = (x_{\varphi(\lambda)})$, ou seja $\varphi^*(x) = x \circ \varphi$. (Comutatividade.)

5. Sejam $L_0 \subset L$ e $x^0 = (x^0_\lambda)_{\lambda \in L_0}$ um ponto em $\prod_{\lambda \in L_0} X_\lambda$. O conjunto S dos pontos $x \in \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$ tais que $x_\lambda = x^0_\lambda$ para todo $\lambda \in L_0$ é homeomorfo ao espaço produto $\prod_{\lambda \in L - L_0} X_\lambda$. Se cada X_λ é um espaço de Hausdorff, então S é um subconjunto fechado de $\prod_{\lambda \in L} X_\lambda$.

6. Para cada $\lambda \in L$, seja $f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$. Defina $f = \prod f_\lambda : \prod X_\lambda \to \prod Y_\lambda$ pondo $f((x_\lambda)) = (f_\lambda(x_\lambda))$. Se cada f_λ é contínua, f é contínua. Se cada f_λ é aberta, f é aberta. Tem-se também $(\prod g_\lambda) \circ (\prod f_\lambda) = \prod (g_\lambda \circ f_\lambda)$. Seja agora $g_\lambda : X \to Y_\lambda$ aberta, para cada $\lambda \in L$. É aberta a aplicação $g = (g_\lambda) : X \to \prod Y_\lambda$, definida por $g(x) = (g_\lambda(x))$?

7. Com a notação do exercício anterior, pode-se ter cada $f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$ uma aplicação quociente sem que $f = \prod f_\lambda : \prod X_\lambda \to \prod Y_\lambda$ seja uma aplicação quociente. Em outras palavras, para cada $\lambda \in L$, seja E_λ uma relação de equivalência no espaço X_λ. Define-se uma relação de equivalência $E = \prod E_\lambda$ no espaço produto $X = \prod X_\lambda$ pondo-se $xEy \Leftrightarrow x_\lambda E_\lambda y_\lambda$ para cada $\lambda \in L$. As aplicações quocientes $\varphi_\lambda : X_\lambda \to X_\lambda/E_\lambda$ induzem a aplicação contínua $\varphi = \prod \varphi_\lambda : \prod X_\lambda \to \prod (X_\lambda/E_\lambda)$, a qual define em $X = \prod X_\lambda$ precisamente a relação de equivalência $E = \prod E_\lambda$. Por passagem ao quociente, tem-se uma aplicação biunívoca e contínua. $f : \prod X_\lambda/\prod E_\lambda \to \prod (X_\lambda/E_\lambda)$, a qual pode não ser um homeomorfismo, mesmo nos casos mais simples. (Resulta do exercício acima que f é um homeomorfismo quando cada E é uma relação de equivalência *aberta*.) O contra-exemplo clássico é o seguinte: no espaço Q dos números racionais, seja E a relação de equivalência que identifica todos os inteiros a um só ponto e deixa intactos os demais números racionais. Seja I a relação de igualdade (uma equivalência bem especial). A aplicação contínua canônica $f : (Q \times Q)/(I \times E) \to Q \times (Q/E)$ não é um homeomorfismo.

8. Seja X um espaço de Hausdorff localmente compacto. Se $\varphi : Y \to Y'$ é uma aplicação quociente, então $id \times Q : X \times Y \to X \times Y'$ é uma aplicação quociente, então $id \times Q : X \times Y \to X \times Y'$ é uma aplicação quociente. Concluir que, dadas as relações de equivalência E em X e F em Y, a aplicação contínua natural $f : (X \times Y)/(E \times F) \to (X/E) \times (Y/F)$ é um homeomorfismo, desde que X e X/F sejam espaços de Hausdorff localmente compactos.

9. O produto $\prod X_\lambda$ é um espaço regular se, e sòmente se, cada fator X_λ é regular.

10. Seja L enumerável ou com a potência do contínuo. O produto $\prod_{\lambda \in L} X_\lambda$ é separável se, e sòmente se, cada fator X_λ é separável.

11. Seja $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de números reais com índices num conjunto arbitrário A. Um número real s chama-se *soma* da família (x_α), e escreve-se $s = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha$ quando, para todo $\epsilon > 0$, existe um subconjunto finito $F_0 \subset A$ tal que $|s - \sum_{\alpha \in F} x_\alpha| < \epsilon$ seja qual fôr o conjunto finito F com $F_0 \subset F \subset A$. Se a família $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ possui uma soma, diz-se que ela é uma família *somável*. Valem as seguintes propriedades:

a) A soma $s = \sum_{\alpha \in A} x_\alpha$, se existe, é única.

b) Para que $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ seja somável é necessário e suficiente que, para cada $\epsilon > 0$, exista um subconjunto finito $F_0 \subset A$ tal que $|\sum_{A \in G} x_\alpha| < \epsilon$, seja qual fôr o subconjunto finito $G \subset A$, com $G \cap F_0 = \varnothing$. (Critério de Cauchy.)

c) Se a família $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ fôr somável, então, $x_\alpha = 0$ salvo para um conjunto enumerável de índices $\alpha \in A$. (Para cada $n \in N$, existe $F_n \subset A$ finito tal que $\alpha \notin F_n \Rightarrow$ $\Rightarrow |x_\alpha| < 1/n$. Logo, $\alpha \notin \cup F_n \Rightarrow x_\alpha = 0$.)

11*a*. Dado o conjunto arbitrário A, seja $l^2(A)$ o subconjunto de $\mathfrak{F}(A; R)$ formado por tôdas as famílias $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ de números reais tais que a família $((x_\alpha)^2)_{\alpha \in A}$ é somável. Assim, $x = (x_\alpha) \in l^2(A) \Leftrightarrow \sum_{\alpha \in A} (x_\alpha)^2 < \infty$. $l^2(A)$ é um subespaço vetorial de $\mathfrak{F}(A; R)$ e $|x| = \sqrt{\sum_\alpha (x_\alpha)^2}$ é uma norma em $l^2(A)$, a qual provém do produto interno $< x, y > =$ $= \sum_\alpha x_\alpha y_\alpha$. O espaço $l^2(A)$ é completo. É separável se, e sòmente se, A é enumerável. Quando se considera em $\mathfrak{F}(A; R)$ a topologia produto, a aplicação de inclusão $l^2(A) \to$ $\to \mathfrak{F}(A; R)$ é contínua. Se A fôr infinito, a topologia de $l^2(A)$ não é induzida por esta aplicação.

12. O conjunto dos números irracionais é homeomorfo ao espaço produto R^N. (Considerar o desenvolvimento de cada número irracional em fração contínua.)

13. Dar exemplo de duas topologias distintas no mesmo conjunto X dando origem à mesma noção de limite de uma seqüência.

14. Se $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ são espaços seqüencialmente compactos, então $Y = \Pi Y_n$ é seqüencialmente compacto. Concluir que se Y é seqüencialmente compacto e Z é enumerável, então tôda seqüência de aplicações $f_n : Z \to Y$ possui uma subseqüência convergente. *Aplicação*: Teorema de Helly: Dado qualquer $X \subset R$, tôda seqüência de funções monótonas $f_n : X \to [a, b]$ possui uma subseqüência convergente. (Observar que se podem supor tôdas as f_n não decrescentes e que se uma subseqüência converge simplesmente num subconjunto enumerável denso em X, a monotonicidade implica que a mesma subseqüência converge simplesmente em X.)

15. Sejam E, F espaços vetoriais normados e $\mathfrak{L}(E; F)$ o conjunto das aplicações lineares contínuas de E em F. $\mathfrak{L}(E; F)$ é um espaço vetorial, no qual se considera a norma $|f| = \sup.\{|f(x)|; x \in E, |x| = 1\}$. A topologia definida por esta norma coincide com a topologia da convergência uniforme nas partes limitadas de E. Seja $S = \{x \in E;$ $|x| = 1\}$. A aplicação de restrição $\mathfrak{L}(E; F) \to \mathfrak{C}_u(S; F)$ é uma isometria de $\mathfrak{L}(E; F)$ sôbre um subconjunto fechado de $\mathfrak{C}_u(S; F)$. Concluir que se F fôr completo, então $\mathfrak{L}(E; F)$ também será.

16. Sejam M, N espaços métricos e $\varphi : M \to N$ uniformemente contínua. Dada uma coleção $\mathfrak{S}$ de partes de um conjunto X, a aplicação $\varphi_* : \mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M) \to \mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; N)$, definida por $\varphi_*(f) = \varphi \circ f$, é contínua.

17. Dadas uma seqüência $M_1, M_2, \ldots$ de espaços métricos e uma coleção $\mathfrak{S}$ de partes de um conjunto X, estabelecer um homeomorfismo de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; \Pi M_n)$ sôbre $\prod_n \mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M_n)$ o qual, se X é um espaço topológico, aplica o subespaço $\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}(X; M_n)$ homeomorfamente sôbre $\prod_n \mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}(X; M)$.

18. Sejam X_1, X_2 conjuntos arbitrários e M um espaço métrico limitado. A aplicação natural $S : \mathfrak{F}_u(X_1 \times X_2; M) \to \mathfrak{F}_u; (X_1; \mathfrak{F}_u(X_2; M))$, definida por $S : f \to \hat{f}$, onde $(\hat{f}(x_1))(x_2) = f(x_1, x_2)$, é uma isometria.

19. No conjunto dos homeomorfismos da reta, a topologia da convergência simples coincide com a topologia da convergência uniforme nas partes compactas.

20. Sejam X um conjunto, $\mathfrak{S}$ uma coleção de partes de X e M um espaço métrico. Para cada $y \in M$, seja c_y a aplicação constante $X \to y$. A aplicação $\varphi : M \to \mathfrak{F}_{\mathfrak{S}}(X; M)$, dada por $\varphi(y) = c_y$, é um homeomorfismo de M sôbre o conjunto das aplicações constantes. Para que a imagem $\varphi(M)$ seja fechada é necessário e suficiente que $\mathfrak{S}$ seja uma cobertura de X.

21. Sejam $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ duas coleções de partes de um conjunto X. Se $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2$ então, para qualquer espaço métrico M, a topologia de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}_2}(X; M)$ é mais fina do que a de $\mathfrak{F}_{\mathfrak{S}_1}(X; M)$. Se $\mathfrak{S}_1$ e $\mathfrak{S}_2$ são coleções saturadas (vide § 5) e $\mathfrak{S}_1 \neq \mathfrak{S}_2$, então as duas topologias acima são diferentes, desde que M possua mais de um ponto.

22. Sejam X, Y espaços topológicos e M um espaço métrico. Diz-se que uma aplicação $f : X \times Y \to M$ é contínua em x, no ponto $x_0 \in X$, *uniformemente em relação a y*, quando, para cada $\epsilon > 0$, existe uma vizinhança V de x_0 em X tal que $x \in V \Rightarrow$ $\Rightarrow d(f(x, y), f(x_0, y)) < \epsilon$, *seja qual fôr* $y \in Y$. Para cada $x \in X$ e cada $y \in Y$ sejam $f_x : Y \to M$ e $f_y : X \to M$ as aplicações parciais definidas por $f_x(y) = f(x, y) = f_y(x)$. As seguintes condições são equivalentes:

a) f é contínua em x, no ponto x_0, uniformemente em relação a y;

b) A aplicação $\hat{f} : X \to \mathfrak{F}_u(Y; M)$, definida por $\hat{f}(x) = f_x$ é contínua no ponto x_0;

c) O conjunto $E = \{f_y : X \to M; y \in Y\} \subset \mathfrak{F}(X; M)$ é eqüicontínuo no ponto x_0.

Se uma das condições acima (e portanto cada uma delas) é satisfeita e, além disso, $f_{x_0} : Y \to M$ é contínua no ponto y_0 então $f : X \times Y \to M$ é contínua no ponto (x_0, y_0) Em particular, se tôdas as aplicações $f_x : Y \to M$, $x \in X$, são contínuas e as aplicações $f_y : X \to M$, $y \in Y$, formam um conjunto eqüicontínuo, então $f : X \times Y \to M$ é contínua. Equivalentemente, se $\hat{f}$ é uma aplicação contínua de X em $\mathfrak{C}_u(Y; M)$, então $f : X \times Y \to M$ é contínua.

23. Sejam X um espaço topológico e M um espaço métrico. A aplicação $v : X \times \mathfrak{F}_u(X; M) \to M$, definida por $v(x, f) = f(x)$, é contínua no ponto (x_0, f_0) se, e sòmente se, f_0 é contínua no ponto x_0. Seja agora $E_s \subset \mathfrak{F}_s(X; M)$ um conjunto eqüicontínuo, munido da topologia da *convergência simples*. Então, $v : X \times E_s \to M$ é contínua. (Aplicar o exercício anterior.)

24. Sejam X, Y espaços topológicos, M um espaço métrico e $E_s \subset \mathfrak{F}_s(Y; M)$ um conjunto eqüicontínuo, munido da topologia da convergência simples. A aplicação $m : E_s \times \mathfrak{F}_s(X; Y) \to \mathfrak{F}_s(X; M)$, definida por $m(g, f) = g \circ f$, é contínua. [Em virtude da propriedade característica da topologia da convergência simples, basta verificar que, para cada $x_0 \in X$, a aplicação $(g, f) \to g(f(x_0))$, de $E \times \mathfrak{F}_s(X; M)$ em M, é contínua. Esta última aplicação é composta de $(g, f) \to (g, f(x_0))$ com $(g, y) \to g(y)$. Usar o exercício anterior.] Vide Exerc. 34, adiante.

25. Sejam M, N espaços métricos. Para que um conjunto $E \subset F(M; N)$ seja uniformemente eqüicontínuo, é necessário e suficiente que a aplicação $v : E_u \times M \to N$, definida por $v(f, x) = f(x)$, seja uniformemente contínua. (E_u está munido da topologia da convergência uniforme.)

26. Sejam E, F espaços vetoriais normados. As seguintes afirmações acêrca de um conjunto $L \subset \mathfrak{L}(E; F)$ são equivalentes:

a) L é eqüicontínuo no ponto $0 \in E$.

b) L é eqüicontínuo.

c) L é uniformemente eqüicontínuo.

d) Existe $a \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq a|x|$ quaisquer que sejam $f \in L$, $x \in E$.

27. (Vide Exerc. 27, Cap. VII.) Dado um caminho retificável $f : [a, b] \to M$ num espaço métrico M, seja $\varphi : [a, b] \to [0, 1]$ a função definida por $\varphi(t) = l(f|[a, t])/l(L)$. Existe um caminho $g : [0, 1] \to M$ retificável, com $g \circ \varphi = f$, $l(g) = l(f)$ e, para todo $s \in [0, 1]$, tem-se $l(g|[0, s]) = s \cdot l(g)$. Por isso diz-se que g é "parametrizado proporcionalmente ao comprimento do arco". Seja $\mathfrak{R}(M)$ o conjunto dos caminhos retificáveis $f : [0, 1] \to M$, parametrizados proporcionalmente ao comprimento de arco. Dados $f \in \mathfrak{R}(M)$, $s, t \in [0, 1]$, tem-se $d(f(s), f(t)) \leq l(f) \cdot |s - t|$. Concluir que, para cada $a \geq 0$, o conjunto $\mathfrak{R}_a(M) = \{f \in \mathfrak{R}(M) ; l(f) \leq a\}$ é eqüicontínuo. Considere em $\mathfrak{R}(M)$ a topologia da convergência uniforme. Como $l : \mathfrak{R}(M) \to R$ é semicontínua inferiormente, segue-se que $\mathfrak{R}_a(M)$ é fechado em $\mathfrak{R}(M)$. Se o espaço métrico M fôr compacto (ou, mais geralmente, se todo subconjunto limitado e fechado de M fôr compacto) então $\mathfrak{R}_a(M)$ é compacto. Anàlogamente é compacto o subconjunto $\mathfrak{R}_a(M; p, q) \subset \mathfrak{R}_a(M)$ formado pelos caminhos f tais que $f(0) = p$, $f(1) = q$, onde $p, q \in M$ são pontos dados. Concluir que se M é compacto (ou, mais geralmente, se todo subconjunto limitado e fechado de M é compacto) e $p, q \in M$ são tais que existe um caminho retificável em M com extremidades p e q, então existe em M um *caminho geodésico* ligando p a q. (Isto é, um caminho de comprimento mínimo ligando êsses dois pontos.) Todo caminho geodésico é uma aplicação biunívoca.

28. Sejam X um espaço topológico, M um espaço métrico e $\{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ um conjunto eqüicontínuo de aplicações $f_n : X \to M$. Se $(f_n(x))$ converge em M, para todo x pertencente a um subconjunto denso $D \subset X$, então (f_n) converge uniformemente em X.

29. No caso de X ser um espaço localmente compacto com base enumerável, dê uma nova demonstração do Teorema de Ascoli utilizando a forma fraca do Teorema de Tychonov, fornecida pela Prop. 8.

30. Se, para cada $\lambda \in L$, $\mathfrak{G}_\lambda$ é um sistema de geradores da topologia de X_λ, então as fatias $p_\lambda^{-1}(G_\lambda)$, $G_\lambda \in \mathfrak{G}_\lambda$, formam um sistema de geradores para a topologia de ΠX_λ.

31. Sejam X, Y espaços topológicos. Dada uma base $\mathfrak{B}$ de Y, os conjuntos $A(K; V)$, onde $K \subset X$ é compacto e $V \in \mathfrak{B}$, geram a topologia de $\mathfrak{C}_{ca}(X; Y)$.

32. Se X e Y são espaços de Hausdorff nos quais todo ponto possui um sistema fundamental enumerável de vizinhanças então a aplicação natural $S : \mathfrak{C}_{ca}(X \times Y; Z) \to$ $\to \mathfrak{C}_{ca}(X; \mathfrak{C}_{ca}(Y; Z))$ é um homeomorfismo. (Observar que, nestas condições, $\tilde{f} : X \times$ $\times L \to Z$ contínua para todo compacto $L \subset Y$ implica $\tilde{f} : X \times Y \to Z$ contínua.)

33. Sejam X, Y, Z espaços topológicos. Tôda aplicação contínua $\varphi : X \to Y$ induz aplicações contínuas $\varphi_* : \mathfrak{C}_{ca}(Z; X) \to \mathfrak{C}_{ca}(X; Y)$ e $\varphi^* : \mathfrak{C}_{ca}(Y; Z) \to \mathfrak{C}_{ca}(X; Z)$ definidas por $\varphi_*(f) = \varphi \circ f$ e $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$.

34. Sejam X um espaço de Hausdorff e Y um espaço de Hausdorff localmente compacto. Qualquer que seja o espaço Z, a aplicação $m : \mathfrak{C}_{ca}(Y; Z) \times \mathfrak{C}_{ca}(X; Y) \to \mathfrak{C}_{ca}(X; Z)$, definida por $m(g, f) = g \circ f$, é contínua.

35. Seja X um espaço de Hausdorff compacto. O conjunto $\mathfrak{H}(X)$ dos homeomorfismos de X, munido da topologia compacto-aberta, é um grupo topológico relativamente à operação $(g, f) \to g \circ f$. (Para provar que $f \to f^{-1}$ é contínua, observar que $f^{-1} \in A(K; U) \Leftrightarrow f \in A(X - U; X - K)$).

36. Sejam X um espaço topológico *E1* e M um espaço métrico. Para que $f_n \to f$ em $\mathfrak{C}_c(X; M)$ é necessário e suficiente que $x_n \to x$ em X implique $f_n(x_n) \to f(x)$ em M.

37. Sejam X, Y espaços topológicos e I o intervalo $[0, 1]$. Duas aplicações contínuas $f, g : X \to Y$ dizem-se *homotópicas* quando existe uma aplicação contínua $H : X \times I \to Y$ (chamada uma *homotopia* entre f e g) tal que, para cada $x \in X$, $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$. Se X fôr um espaço de Hausdorff localmente compacto ou um espaço *E1*, f e g são homotópicas se, e sòmente se, pertencem à mesma componente conexa por caminhos no espaço $\mathfrak{C}_{ca}(X; Y)$. Tais componentes chamam-se as *classes de homotopia* das aplicações $f : X \to Y$.

38. Se Y é um espaço regular, então, para todo espaço X, $\mathfrak{C}_{ca}(X; Y)$ é regular.

39. Com a notação do Exerc. 20, seja $\varphi : Y \to \mathfrak{C}_{ca}(X; Y)$ a aplicação definida por $\varphi(y) = c_y$. Mostre que φ é um homeomorfismo sôbre um subespaço. Se Y é de Hausdorff, tal subespaço é fechado. Obtenha a recíproca do exercício anterior: se $\mathfrak{C}_{ca}(X; Y)$ é regular, então Y é regular.

40. Dado um subespaço $S \subset Y$, $\mathfrak{C}_{ca}(X; S)$ é homeomorfo ao subespaço de $\mathfrak{C}_{ca}(X; Y)$ formado pelas aplicações contínuas $f : X \to Y$ tais que $f(X) \subset S$.

Extensão de Funções Reais Contínuas

Capítulo X

§ 1. Introdução

Neste capítulo demonstraremos dois teoremas clássicos sôbre extensão de funções reais contínuas num espaço topológico. O primeiro dêles será o Teorema da Extensão de Tietze, que afirma ser possível estender tôda função real contínua, definida num subconjunto fechado de um espaço normal, a uma função real contínua em todo o espaço. O problema geral de saber em que condições uma aplicação contínua $f : A \to Y$, definida num subconjunto fechado A de um espaço topológico X, admite uma extensão contínua $\overline{f} : X \to Y$, constitui um dos capítulos mais importantes da Topologia Algébrica.

O segundo teorema dêste capítulo afirma que, para uma categoria bastante ampla de espaços topológicos X (espaços "completamente regulares") é possível obter uma compactificação $\beta(X)$, chamada a compactificação de Stone-Cech, tal que tôda função real contínua limitada $f : X \to R$ estende-se a uma função real contínua $\overline{f} : \beta(X) \to R$.

§ 2. O Teorema da Extensão de Tietze

Seja F um conjunto fechado de números reais. Dada uma função real contínua $f : F \to R$, procuremos estender f contìnuamente a tôda a reta, isto é, obter uma função real contínua $\varphi : R \to R$ tal que $\varphi | F = f$. $R - F$ é aberto, e portanto é uma reunião disjunta de intervalos abertos (suas componentes conexas). Para cada um dêsses intervalos (a, b) que compõem $R - F$, temos $a, b \in F$. Definiremos então φ linearmente em $[a, b]$, de modo a coincidir com f nas extremidades a e b. Mais explìcitamente, para $a \leq x \leq b$, poremos $\varphi(x) = f(a) + (x - a) . \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

[Se $R - F$ contiver um intervalo ilimitado, digamos da forma $(a, +\infty)$, poremos $\varphi(x) = f(a) + (x - a)$ para $a \leq x < +\infty$.]

Assim, o problema de estender contìnuamente a tôda a reta uma função real contínua definida num subconjunto fechado $F \subset R$ tem uma resposta positiva e uma solução fácil.

Se, porém, F é um subconjunto fechado do plano R^2, o problema de estender contìnuamente a todo o plano uma função contínua $f: F \to R$ não é trivial. Uma solução afirmativa foi obtida por H. Lebesgue em 1907. (Para uma exposição dêsse teorema, vide B. Epstein, "Partial Differential Equations", MacGraw-Hill, N. Y., pág. 7.) A mesma demonstração de Lebesgue vale quando F é um subconjunto do espaço euclidiano R^n. Posteriormente (1914), H. Tietze demonstrou que se $F \subset M$ é um subconjunto fechado de um espaço métrico qualquer M, tôda função real contínua $f: F \to R$ pode ser estendida contìnuamente ao espaço inteiro M. (Uma demonstração dêste teorema está exposta em [Dieudonné], pág. 85.) Deve-se também a Tietze o conceito de espaço normal, mas coube a P. Urysohn (em 1925), como conseqüência do seu Lema (Prop. 12, Cap. VIII) demonstrar o teorema de extensão de funções reais contínuas $f: F \to R$ no caso em que F é um subconjunto fechado de um espaço normal X. Esta é a situação mais geral em que o teorema pode ser demonstrado, em virtude da seguinte proposição:

Proposição 1 — *Seja X um espaço topológico. Cada uma das afirmações abaixo implica a seguinte:*

1) *dados $F \subset X$ fechado e $f: F \to R$ contínua, existe $\varphi: X \to R$ contínua tal que $\varphi | F = f$;*

2) *dados $F, G \subset X$ fechados disjuntos, existe $\varphi: X \to R$ tal que $\varphi(F) = 0$, $\varphi(G) = 1$;*

3) *X é normal.*

Demonstração: Para mostrar que 1) $\Rightarrow$ 2), consideremos a função $f: F \cup G \to R$ definida por $f(F) = 0$, $f(G) = 1$. Evidentemente f é contínua. Usando 1), f estende-se a uma função contínua $\varphi: X \to R$, o que demonstra 2). Para mostrar que 2) $\Rightarrow$ 3), dados $F, G \subset X$ fechados disjuntos, tomamos $\varphi: X \to R$ contínua, com $\varphi(F) = 0$, $\varphi(G) = 1$ e definimos $U = \{x \in X; \varphi(x) < 1/2\}$, $V = \{x \in X; \varphi(x) > 1/2\}$. U e V são abertos disjuntos, $F \subset U$ e $G \subset V$.

Nosso objetivo neste parágrafo é mostrar que 3) $\Rightarrow$ 1). Êste teorema, fruto dos trabalhos de Lebesgue, Tietze e Urysohn, é geralmente conhecido como o "Teorema da Extensão de Tietze".

PROPOSIÇÃO 2 — *Sejam F um subconjunto fechado de um espaço normal X e J um intervalo da reta real. (J pode ser aberto ou não, limitado ou ilimitado.) Dada uma função real contínua $f : F \to J$, existe uma função contínua $\varphi : X \to J$ tal que $\varphi(x) = f(x)$ para todo $x \in F$.*

Demonstração: Suponhamos inicialmente que J é fechado e limitado. Não há perda de generalidade em supor $J = [-a, a]$, onde $a > 0$, pois qualquer $[c, d]$ é homeomorfo a $[-a, a]$, $a > 0$. Assim, $|f(x)| \leq a$ para todo $x \in F$. O passo fundamental é obter uma função real contínua $\varphi_1 : X \to R$ tal que $|\varphi_1(x)| \leq a/3$ para todo $x \in X$ e $|f(x) - \varphi_1(x)| \leq 2a/3$ para todo $x \in F$. Isto se faz observando que os conjuntos $F_1 = \{x \in F; f(x) \leq -a/3\}$ e $G_1 = \{x \in F; f(x) \geq a/3\}$ são fechados em X e disjuntos; logo, pelo Lema de Urysohn (Prop. 12, Cap. VIII), existe $\varphi_1 : X \to [-a/3, a/3]$ contínua tal que $\varphi_1(F_1) = -a/3$, $\varphi_1(G_1) = a/3$. É imediato que $|f(x) - \varphi_1(x)| \leq 2a/3$ para todo $x \in F$. O mesmo raciocínio, aplicado à função $f - \varphi_1 : F \to [-2a/3, 2a/3]$, conduz à existência de uma função contínua $\varphi_2 : X \to R$ tal que $|\varphi_2(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} a$ para todo $x \in X$ e $|f(x) - \varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq (2/3)^2 \cdot a$ para todo $x \in F$. Prosseguindo anàlogamente, obtemos uma seqüência de funções contínuas $\varphi_n : X \to R$ tais que $|\varphi_n(x)| \leq (1/3)^n \cdot (2/3) \cdot a$ para todo $x \in X$ e $|f(x) - \varphi_1(x) - \ldots - \varphi_n(x)| \leq (2/3)^n \cdot a$ para todo $x \in F$. A primeira dessas desigualdades mostra que os têrmos da série $\Sigma\varphi_n(x)$ são uniformemente majorados pelos têrmos da série geométrica $(2a/3)\, \Sigma\, (1/3)^n = a$. Logo, $\varphi(x) = \Sigma\varphi_n(x)$ define uma função contínua $\varphi : X \to [-a, a]$. A segunda das desigualdades acima mostra que $\varphi(x) = f(x)$ para todo $x \in F$.

Consideremos agora o caso em que $J = [-a, a)$ é limitado e semi-aberto. Dada $f : F \to [-a, a)$ contínua, o método acima fornece uma função contínua $\varphi_0 : X \to [-a, a]$ que coincide com f em F. O conjunto $G = \{x \in X; \varphi_0(x) = a\}$ é fechado em X e disjunto de F. Pelo Lema de Urysohn, existe uma função contínua $\xi : X \to [0, 1]$ tal que $\xi(F) = 1$, $\xi(G) = 0$. Seja $\varphi : X \to R$ definida por $\varphi(x) = \xi(x) \cdot \varphi_0(x)$. A aplicação φ é contínua, coincide com f em F e $\varphi(X) \subset [-a, a)$. De maneira análoga se tratam os casos de intervalos da forma $(-a, a]$ e $(-a, a)$. Qualquer intervalo é homeomorfo a um dêstes, de modo que a proposição está completamente demonstrada.

COROLÁRIO 1 — *Seja F um subconjunto fechado de um espaço normal X. Tôda aplicação contínua $f : F \to R^n$ pode ser contìnuamente estendida a uma aplicação $\varphi : X \to R^n$.*

Com efeito, basta estender cada uma das funções coordenadas $f_i : F \to R$, onde $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$.

Evidentemente, o corolário acima é válido também para aplicações $f : F \to \prod_{i=1}^{n} J_i$, onde $J_1, \ldots, J_n$ são intervalos da reta. Mais geralmente, o número de intervalos pode ser infinito. Por exemplo, se $Y = \mathfrak{F}_s(L; R)$ é o conjunto das funções reais definidas num conjunto arbitrário L e se Y tem a topologia da convergência simples, então tôda aplicação contínua $f : F \to Y$, definida num subconjunto fechado F de um espaço normal X, pode ser estendida a uma aplicação contínua $\varphi : X \to Y$, definida no espaço inteiro X.

Corolário 2 — *Sejam F um subconjunto fechado de um espaço normal X e S^n a esfera unitária n-dimensional. Tôda aplicação contínua $f : F \to S^n$ pode ser estendida continuamente a uma vizinhança de F em X.*

Com efeito, sendo $S^n \subset R^{n+1}$, podemos considerar f como uma aplicação contínua de F em R^{n+1}. Pelo Corol. 1, existe $\varphi_0 : X \to R^{n+1}$ contínua tal que $\varphi_0(x) = f(x)$ para todo $x \in F$. Seja $U = \{x \in X;\ \varphi_0(x) \neq 0\}$. U é uma vizinhança aberta de F. Definamos $\varphi : U \to S^n$ pondo $\varphi(x) = \varphi_0(x)/|\varphi_0(x)|$ para cada $x \in U$. Se $x \in F$, então $\varphi_0(x) = f(x) \in S^n$, logo $|\varphi_0(x)| = 1$ e portanto $\varphi(x) = f(x)$.

Observações — 1) Não é verdade que tôda aplicação contínua $f : F \to S^n$ possa estender-se continuamente a uma aplicação $\varphi : X \to S^n$. Por exemplo, a aplicação identidade $f : S^1 \to S^1$ não possui uma extensão contínua $\varphi : R^2 \to S^1$. (*Cf.* Exerc. 39, Cap. VII.)

2) Existem subconjuntos fechados $F \subset R^2$ tais que a aplicação identidade $f : F \to F$ não possui uma extensão contínua $\varphi : V \to F$, seja qual fôr a vizinhança $V \supset F$. Basta considerar $F = C_1 \cup \ldots \cup C_n \cup \ldots$ onde cada C_n é o círculo de raio $1/n$ e centro no ponto $(0, 1/n)$. Qualquer vizinhança de F contém uma infinidade de círculos C_n e também de discos D_n (onde C_n é a fronteira de D_n). Uma extensão $\varphi : V \to F$ forneceria, em particular, uma aplicação contínua $\psi : D_n \to F$ tal que $\psi | C_n =$ identidade. Considerando a aplicação contínua $r : F \to C_n$ tal que $r | C_n =$ identidade e $r(x) = (0, 0)$ para todo $x \in F - C_n$, veríamos que $r \circ \psi : D_n \to C_n$ seria uma retração, o que contraria o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer (vide Ex. 39, Cap. VII).

§ 3. A Compactificação de Stone-Cech

No Cap. VII, §5, uma *compactificação* de um espaço topológico X foi definida como um homeomorfismo $\varphi : X \to Y$ de X sôbre uma parte densa $\varphi(X)$ de um espaço compacto Y.

Sob êste ponto de vista geral, todo espaço topológico X possui pelo menos uma compactificação. Basta considerar a aplicação de inclusão

$\varphi : X \to X^*$, onde $X^* = X \cup \{\omega\}$, $\omega \notin X$, as vizinhanças do ponto ω sendo os complementares em X^* dos subconjuntos compactos de X. Esta imitação da compactificação de Alexandrov tem contudo um inconveniente: se X não fôr localmente compacto, o espaço X^* não será de Hausdorff, mesmo que X o seja.

É, portanto, natural perguntar: quais espaços de Hausdorff X possuem uma compactificação $\varphi : X \to Y$, onde Y é de Hausdorff?

Outro problema que se refere a compactificações de um espaço topológico X é o seguinte: dada uma função real limitada, digamos $f : X \to [0, 1]$, existirá alguma compactificação $\varphi : X \to Y$ tal que f se estenda a uma função contínua $\bar{f} : Y \to [0, 1]$?

Para que esta pergunta tenha sentido, é preciso que imaginemos $X \subset Y$, ou seja, que identifiquemos X com $\varphi(X)$. Melhor ainda será formular a pergunta em têrmos mais precisos: dada $f : X \to [0, 1]$ contínua, existirá uma compactificação $\varphi : X \to Y$ e uma aplicação contínua $\bar{f} : Y \to [0, 1]$ tal que $\bar{f} \circ \varphi = f$?

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ & {\scriptstyle f}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \bar{f}} & \\ & [0,1] & \end{array}$$

A relação $\bar{f} \circ \varphi = f$ se exprime dizendo que o diagrama acima é *comutativo*.

Vejamos um exemplo. Sejam $X = (0, 1]$ e $f : (0, 1] \to [-1, +1]$ definida por $f(x) = \text{sen}(1/x)$. O gráfico $G(f) = \{(x, f(x)) \in R^2; x \in (0, 1]\}$ é um subconjunto limitado do plano e portanto o seu fecho $Y = \overline{G(f)}$ é compacto. A aplicação $\varphi : (0, 1] \to Y$, definida por $\varphi(x) = (x, f(x))$ é um homeomorfismo de $(0, 1]$ sôbre $G(f)$ e portanto φ é uma compactificação do espaço $(0, 1]$. Seja $\bar{f} : Y \to [-1, +1]$ definida por $\bar{f}(x, y) = y$. Tem-se evidentemente $\bar{f} \circ \varphi = f$. Logo, a compactificação $\varphi : (0, 1] \to Y$ goza da propriedade de que a função contínua $f(x) = \text{sen}(1/x)$, definida em $(0, 1]$ "estende-se" a uma função contínua $\bar{f}$ em Y.

0 1

Mostraremos agora que, mediante uma restrição conveniente imposta ao espaço X, é possível obter uma compactificação $\varphi : X \to Y$ tal que *tôda* função real contínua limitada, definida em X, estende-se a Y. Êste tipo de compactificação é devido a M. H. Stone e E. Cech. Como subproduto, obteremos uma caracterização dos espaços de Hausdorff X que possuem uma compactificação $\varphi : X \to Y$, Y de Hausdorff.

O ponto crucial é a introdução do seguinte conceito.

Um espaço topológico X chama-se *completamente regular* quando, dados arbitràriamente um ponto $x \in X$ e um aberto U em X, com $x \in U$,

existir sempre uma função contínua $f: X \to [0, 1]$ tal que $f(x) = 1$ e $f(X - U) = 0$.

EXEMPLOS

1. Em virtude do Lema de Urysohn (Prop. 12, Cap. VIII) todo espaço de Hausdorff normal é completamente regular. Segue-se que todos os espaços métricos são completamente regulares, bem como os espaços compactos de Hausdorff. No caso de um espaço métrico M, dado $x_0 \in U$, $U \subset M$ aberto, a função $f : M \to [0, 1]$, definida por $f(x) = d(x, M - U)/[d(x, x_0) + d(x, M - U)]$, é contínua, com $f(x_0) = 1$, $f(x) = 0$ se $x \in M - U$.

2. Todo espaço completamente regular X é, em particular, regular. Com efeito, dados $x \in U \subset X$, U aberto em X, tomamos $f : X \to [0, 1]$ contínua com $f(x) = 1$, $f(X - U) = 0$ e vemos que $V = f^{-1}([1/2, 1])$ é uma vizinhança fechada de x contida em U. A recíproca é falsa. Existem espaços de Hausdorff regulares que não são completamente regulares. (Vide, por exemplo, [Dugundji], Pág. 154.)

3. Todo subespaço S de um espaço completamente regular X é completamente regular. Com efeito, dados $s_0 \in U \subset S$, U aberto em S, existe U' aberto em X com $U = U' \cap S$. Existe portanto $f' : X \to [0, 1]$ contínua com $f(s_0) = 1$ e $f'(X - U') = 0$. Seja $f = f'|S$. Tem-se, evidentemente, $f(S - U) \subset f'(X - U') = 0$. Segue-se daí que todo subespaço de um espaço de Hausdorff compacto é completamente regular. Em particular, para que um espaço (de Hausdorff) X possua uma compactificação $\varphi : X \to Y$ onde Y é de Hausdorff, é *necessário* que X seja completamente regular. Mostraremos a seguir que esta condição também é suficiente.

4. Como todo espaço de Hausdorff localmente compacto X possui uma compactificação (de Alexandrov) $\varphi : X \to X^*$, onde X^* é um espaço de Hausdorff, segue-se que todo espaço de Hausdorff localmente compacto é completamente regular.

Seja X um espaço topológico. Indiquemos com I o intervalo fechado $[0, 1]$ e com $\mathfrak{C}$ o conjunto $\mathfrak{C}(X; I)$ das funções contínuas $f : X \to I$.

Consideremos o "cubo" $I^{\mathfrak{C}}$, isto é, o produto cartesiano $I^{\mathfrak{C}} = \prod_{f \in \mathfrak{C}} I_f$, onde $I_f = I$ para cada $f \in \mathfrak{C}$. Como sabemos, cada ponto de $I^{\mathfrak{C}}$ é uma família $(t_f)_{f \in \mathfrak{C}}$, com $0 \leq t_f \leq 1$ para cada $f \in \mathfrak{C}$.

Pelo Teorema de Tychonov, $I^{\mathfrak{C}}$ é um espaço de Hausdorff compacto. Existe uma aplicação natural

$$\varphi : X \to I^{\mathfrak{C}}$$

definida pondo-se, para cada $x \in X$, $\varphi(x) = (x_f)_{f \in \mathfrak{C}}$, onde $x_f = f(x)$. Em outras palavras, φ associa a cada $x \in X$ a família $(f(x))_{f \in \mathfrak{C}}$ dos valôres assumidos no ponto x pelas várias funções contínuas $f : X \to I$.

A aplicação $\varphi : X \to I^{\mathfrak{C}}$ é contínua (*Cf.* Prop. 2, Cap. IX) porque, para cada $f \in \mathfrak{C}$, a aplicação composta $\pi_f \circ \varphi : X \to I$ (onde $\pi_f : I^{\mathfrak{C}} \to I$ é a projeção sôbre o f-ésimo fator) coincide com a própria aplicação $f : X \to I$, donde $\pi_f \circ \varphi$ é contínua.

Proposição 3 — *Para que a aplicação contínua $\varphi : X \to I^{\mathfrak{C}}$, acima definida, seja um homeomorfismo de X sôbre $\varphi(X)$ é necessário e suficiente que X seja um espaço de Hausdorff completamente regular.*

Demonstração: A condição é òbviamente necessária pois $\varphi(X)$ é um subespaço do espaço de Hausdorff compacto $I^{\mathfrak{C}}$. Suponhamos, recìprocamente, que X seja completamente regular, de Hausdorff. Dados $x \neq y$ em X, existe um aberto U com $x \in U$ e $y \notin U$. Existe também uma função contínua $f_0 : X \to I$ tal que $f_0(x) = 1$ e $f_0(X - U) = 0$, donde $f_0(y) = 0$. Segue-se que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, pois $\varphi(x) = (x_f)_{f \in \mathfrak{C}}$ e $\varphi(y) = (y_f)_{f \in \mathfrak{C}}$, com $x_{f_0} = f_0(x) \neq f_0(y) = y_{f_0}$. Por conseguinte, φ é biunívoca. Mostremos agora que φ é uma aplicação aberta de X sôbre $\varphi(X)$. Observemos inicialmente que, quando f varia em $\mathfrak{C}$, os conjuntos $V_f = \{x \in X; f(x) > 0\}$ formam uma base de abertos em X. Com efeito, sejam U aberto e $x_0 \in U$. Existe $f \in \mathfrak{C}$, com $f(x_0) = 1$, $f(X - U) = 0$, donde $x_0 \in V_f \subset U$. Em seguida notemos que, para cada $f_0 \in \mathfrak{C}$, o conjunto $A = \{(t_f) \in I^{\mathfrak{C}}; t_{f_0} < 0\}$ é aberto em $I^{\mathfrak{C}}$ e, além disso,

$$\varphi(V_{f_0}) = \{(x_f) \in I^{\mathfrak{C}}; x_f = f(x), x \in V_{f_0}\} = \varphi(X) \cap A.$$

Segue-se que φ transforma os abertos básicos V_f em abertos de $\varphi(X)$, o que conclui a demonstração.

Dado o espaço de Hausdorff completamente regular X, indiquemos com $\beta(X) = \overline{\varphi(X)}$ o fecho da imagem da aplicação $\varphi : X \to I^{\mathfrak{C}}$. Então, $\beta(X)$ é um espaço de Hausdorff compacto e $\varphi : X \to \beta(X)$ é uma compactificação de X, chamada a *compactificação de Stone-Cech* do espaço X.

Muitas vêzes, o espaço $\beta(X)$ é chamado a compactificação de Stone-Cech do espaço X, ficando subentendida a aplicação natural $\varphi : X \to \beta(X)$, $\varphi(x) = (f(x))_{f \in \mathfrak{C}}$.

Um corolário da construção de $\beta(X)$ é que um espaço de Hausdorff X é completamente regular se, e sòmente se, é homeomorfo a um subespaço de um "cubo" $I^L = \prod_{\lambda \in L} I_\lambda$, $I_\lambda = I$ para todo $\lambda \in L$.

Evidentemente, um espaço de Hausdorff compacto X é homeomorfo à sua compactificação de Stone-Cech $\beta(X)$ e portanto pode sempre ser naturalmente identificado a um subconjunto fechado do cubo $I^{\mathfrak{C}}$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(X; I)$.

Daremos agora uma caracterização da compactificação de Stone-Cech em têrmos da propriedade de extensão de funções contínuas.

Diremos que duas compactificações $\varphi : X \to Y$, $\varphi' : X \to Y'$ do mesmo espaço topológico X são *isomorfas* quando existir um homeomorfismo $h : Y \to Y'$ tal que $h \circ \varphi = \varphi'$.

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \varphi \swarrow & & \searrow \varphi' \\ Y & \xrightarrow{h} & Y' \end{array}$$

PROPOSIÇÃO 4 — *Seja X um espaço completamente regular, de Hausdorff. Dada uma compactificação $\psi : X \to Y$, as seguintes condições são equivalentes.*

1) $\psi : X \to Y$ *é isomorfa à compactificação de Stone-Cech* $\varphi : X \to \beta(X)$;

2) *para tôda função real contínua limitada* $f : X \to R$, *existe uma (única) função contínua* $\bar{f} : Y \to R$ *tal que* $\bar{f} \circ \psi = f$; *se* $f(X) \subset [a, b]$, *então*, $\bar{f}(Y) \subset [a, b]$;

3) *para tôda aplicação contínua* $g : X \to Z$ *num espaço de Hausdorff compacto* Z, *existe uma (única) aplicação contínua* $\bar{g} : Y \to Z$ *tal que* $\bar{g} \circ \psi = g$.

Demonstração: Para mostrar que 1) $\Rightarrow$ 2), basta considerar a compactificação de Stone-Cech $\varphi : X \to \beta(X)$ e uma função contínua $f : X \to I$. Temos $\beta(X) \subset I^{\mathfrak{C}}$. Seja $\pi_f : I^{\mathfrak{C}} \to I$ a f-ésima projeção. Temos $\pi_f \circ \varphi = f$, pela própria definição de φ. Pondo $\bar{f} = \pi_f | \beta(X)$, vemos que $\bar{f} : \beta(X) \to I$ é contínua e $\bar{f} \circ \varphi = f$. A unicidade de $\bar{f}$ resulta do fato de que a igualdade $\bar{f} \circ \varphi = f$ determina $\bar{f}$ no subconjunto denso $\varphi(X) \subset \beta(X)$ e portanto em todo o espaço $\beta(X)$.

2) $\Rightarrow$ 3). Podemos considerar Z como subconjunto fechado de um cubo I^L. A aplicação contínua $g : X \to Z$ é portanto definida por uma família $(g_\lambda)_{\lambda \in L}$ de funções contínuas $g_\lambda : X \to I$ com $g(x) = (g_\lambda(x))_{\lambda \in L}$, para todo $\lambda \in L$. Para cada $\lambda \in L$, existe $\bar{g}_\lambda : Y \to I$ contínua tal que $\bar{g}_\lambda \circ \psi = g_\lambda$. Seja $\bar{g} : Y \to I^L$ definida por $\bar{g}(x) = (\bar{g}_\lambda(x))_{\lambda \in L}$. Temos $\bar{g} \circ \psi = g$. Segue-se que $\bar{g}(\psi(X)) \subset Z$, donde $\bar{g}(Y) = \bar{g}\left(\overline{\varphi(X)}\right) \subset \bar{Z} = Z$. Logo, $\bar{g}$ é uma aplicação de Y em Z, o que demonstra a implicação.

Mostremos, finalmente, que 3) $\Rightarrow$ 1). A compactificação de Stone-Cech $\varphi : X \to \beta(X)$, em virtude do que acaba de ser visto, satisfaz à condição 3). Assim, dada a compactificação $\psi : X \to Y$, que também satisfaz 3), existem aplicações contínuas $\bar{\varphi} : X \to \beta(X)$ e $\bar{\psi} : \beta(X) \to Y$ tais que $\bar{\psi} \circ \varphi = \psi$ e $\bar{\varphi} \circ \psi = \varphi$. Segue-se destas duas igualdades que $\bar{\varphi} \circ \bar{\psi} \circ \varphi = \bar{\varphi} \circ \psi = \varphi$, donde $\bar{\varphi} \circ \bar{\psi} : \beta(X) \to \beta(X)$ coincide com a iden-

tidade nos pontos de $\varphi(X)$. Como êste conjunto é denso em $\beta(X)$, concluímos que $\overline{\varphi} \circ \overline{\psi} = \text{id.} : \beta(X) \to \beta(X)$. Anàlogamente se vê que $\overline{\psi} \circ \overline{\varphi} = \text{id.} : Y \to Y$, donde $\overline{\varphi}$ e $\overline{\psi}$ são homeomorfismos, um sendo o inverso do outro. A Prop. 4 está demonstrada.

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \varphi \swarrow & & \searrow \psi \\ \beta(X) & \underset{\overline{\varphi}}{\overset{\overline{\psi}}{\rightleftarrows}} & Y \end{array}$$

CorolÁrio — *A compactificação de Stone-Cech é um processo "natural" (ou functorial) no seguinte sentido. Dados espaços de Hausdorff completamente regulares X, Y, Z, sejam* $\varphi : X \to \beta(X)$, $\psi : Y \to \beta(Y)$, $\zeta : Z \to \beta(Z)$ *suas compactificações de Stone-Cech. Tôda aplicação contínua* $\lambda : X \to Y$ *induz uma aplicação contínua* $\lambda_* : \beta(X) \to \beta(Y)$, *caracterizada pelo fato de que o diagrama ao lado é comutativo.*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\lambda} & Y \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ \beta(X) & \xrightarrow{\lambda_*} & \beta(Y) \end{array}$$

Se $\mu : Y \to Z$ *é outra aplicação contínua, considerando-se* $\mu_* : \beta(Y) \to \beta(Z)$, *tem-se* $(\mu \circ \lambda)_* = \mu_* \circ \lambda_* : \beta(X) \to \beta(Z)$. *Se* $i : X \to X$ *fôr a aplicação identidade, então* $i_* : \beta(X) \to \beta(X)$ *também é a identidade. Segue-se que, se* $\lambda : X \to Y$ *fôr um homeomorfismo, então* $\lambda_* : \beta(X) \to \beta(Y)$ *também será um homeomorfismo.*

Demonstração: Seja $g = \psi \circ \lambda : X \to \beta(Y)$. Pela Prop. 4, existe uma única aplicação contínua $\bar{g} : \beta(X) \to \beta(Y)$ tal que $\bar{g} \circ \varphi = g = \psi \circ \lambda$. Ponhamos $\lambda_* = \bar{g}$. Vê-se que λ_* torna o diagrama comutativo e é a única aplicação contínua com esta propriedade, em virtude da unicidade de $\bar{g}$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\mu \circ \lambda} & Z \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \zeta \\ \beta(X) & \xrightarrow{\mu_* \circ \lambda_*} & \beta(Z) \end{array}$$

Para mostrar que $(\mu \circ \lambda)_* = \mu_* \circ \lambda_*$ basta observar que $\mu_* \circ \lambda_* : \beta(X) \to \beta(Z)$ torna comutativo o diagrama. Pela unicidade de $(\mu \circ \lambda)_*$, segue-se que $(\mu \circ \lambda)_* = \mu_* \circ \lambda_*$. As demais afirmações são óbvias.

EXEMPLO

Seja X um espaço de Hausdorff completamente regular. Indiquemos com $\mathfrak{C}_0(X; R^n)$ o espaço das aplicações contínuas limitadas $f: X \to R^n$, com a métrica da convergência uniforme. Por simplicidade, imaginemos $X \subset \beta(X)$ e consideremos a aplicação de restrição $\rho: \mathfrak{C}(\beta(X); R^n) \to$ $\to \mathfrak{C}_0(X; R^n)$, onde $\rho(f) = f|X$, e $\mathfrak{C}(\beta(X); R^n)$ é o espaço das aplicações contínuas do compacto $\beta(X)$ em R^n, com a métrica da convergência uniforme. Como X é denso em $\beta(X)$, dadas $f, g: \beta(X) \to R^n$ contínuas, tem-se $d(f, g) =$ $= d(f|X, g|X)$, de modo que ρ é uma imersão isométrica de $\mathfrak{C}(\beta(X); R^n)$. Por outro lado, todo conjunto limitado em R^n sendo relativamente compacto, cada $g \in \mathfrak{C}_0(X; R^n)$ pode ser considerada como uma aplicação contínua de X num compacto, donde existe (vide Prop. 4) $\bar{g}: \beta(X) \to R^n$ contínua tal que $\rho(\bar{g}) = g$. Segue-se que $\rho: \mathfrak{C}(\beta(X); R^n) \to \mathfrak{C}_0(X; R^n)$ é uma isometria. Em particular êstes dois espaços de funções são homeomorfos. Ora, a topologia de $\mathfrak{C}(\beta(X); R^n)$ coincide com a topologia compacto-aberta (vide Prop. 19 Cap. IX) e portanto depende apenas das topologias de $\beta(X)$ e R^n, mas não da métrica de R^n. Resulta que, dado X completamente regular, de Hausdorff, a topologia de $\mathfrak{C}_0(X; R^n)$ não depende da métrica que se toma em R^n mas é um invariante topológico dos espaços X e R^n.

§ 4. Exercícios

1. Para que um espaço completamente regular seja de Hausdorff, é necessário e suficiente que cada um dos seus pontos seja um subconjunto fechado.

2. Seja X um espaço topológico *arbitrário*. Existe uma compactificação $\varphi: X \to Y$ tal que tôda função contínua $f: X \to [0, 1]$ estende-se continuamente a Y. (Considere $Z = X^* \times I^{\mathfrak{C}}$, onde $X^* = X \cup \{\omega\}$ imita a compactificação de Alexandrov de X. Defina $\varphi(x) = (x, (f(x))_{f \in \mathfrak{C}}, x \in X)$.

3. O produto cartesiano $X = \prod_{\lambda \in L} X_\lambda$ é completamente regular se, e sòmente se, cada fator X_λ fôr completamente regular.

4. Seja X um conjunto bem ordenado, não-enumerável, possuindo um último elemento Ω, tal que, para todo $a \in X - \Omega$, o conjunto $\{x \in X; x \leq a\}$ é enumerável. Considerando em X a topologia da ordem que tem uma base de abertos formada pelos intervalos $(a, b) = \{x \in X; a < x < b\}$, X é um espaço de Hausdorff compacto e, pondo $X' = X - \Omega$, X é homeomorfo a $\beta(X')$.

Bibliografia

N. Bourbaki — *Topologie Générale.* Hermann, Paris (Capítulos I a X).

J. Dieudonné — *Foundations of Modern Analysis,* Academic Press, New York.

J. Dugundji — *Topology,* Allyn and Bacon, New York.

W. Hurewicz e H. Wallman — *Dimension Theory,* Princeton University Press.

J. L. Kelley — *General Topology,* Van Nostrand, Princeton, N. J.

S. Lang — *Introduction to Differentiable Manifolds,* Interscience, New York.

M. Newman — *Elements of the Topology of Plane Sets of Points,* Cambridge University Press.

L. Schwartz — *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique,* Hermann, Paris.

Índice Alfabético